Teorema de Pitágoras e Áreas

Eduardo Wagner

versão 2015

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição
Décima primeira impressão

Capa: Rogério Kaiser

Wagner, Eduardo
Teorema de Pitágoras e Áreas
Rio de Janeiro, IMPA, 2015
86 páginas
ISBN 978-85-244-0342-2

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: cad_obmep@obmep.org.br
www.obmep.org.br

Texto já revisado pela nova ortografia.

Sobre o Autor

Eduardo Wagner é formado em engenharia pela UFRJ e mestre em matemática pelo IMPA. Como professor de matemática, atua tanto no Ensino Médio quanto no superior. Suas atividades com olimpíadas de Matemática começaram em 1989, tendo sido coordenador da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro por três anos e da Olimpíada Brasileira de Matemática por cinco anos, participando até hoje como membro da Comissão da OBM, da sua organização e desenvolvimento. Também tem desempenhando a função de líder da delegação brasileira em diversas olimpíadas internacionais. Desde 1991 é professor do Programa de Aperfeiçoamento de Professores promovido pelo IMPA e também é membro do Comitê Editorial da Revista do Professor de Matemática publicada pela SBM. É autor de diversos livros dentre os quais seis volumes da Coleção do professor de Matemática, publicada pela SBM e de uma extensa coleção de artigos publicados na RPM e em outras revistas especializadas.

Sumário

Antes de começar

Este pequeno livro é dedicado a dois temas de geometria da maior importância: o Teorema de Pitágoras e as Áreas. Estes dois assuntos, que possuem forte conexão, são abordados em geral na 9º ano do Ensino Fundamental, de forma bastante breve e em nível naturalmente adequado aos alunos dessa faixa etária. Como estes temas não são normalmente retomados no Ensino Médio, grande parte dos alunos não tem oportunidade de conhecer a enorme riqueza das aplicações, muitas por vezes, surpreendentes.

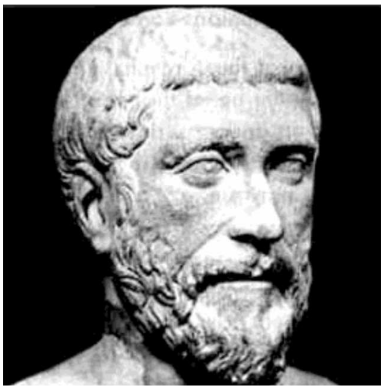
O Teorema de Pitágoras aparece com um pouco de seu contexto histórico, algumas demonstrações e importantes generalizações. Apresentamos também algumas construções geométricas associadas ao triângulo retângulo com a finalidade principal de despertar a curiosidade dos leitores para as construções com régua e compasso que fornecem situações muito educativas, intrigantes e desafiadoras.

O capítulo sobre Áreas, além de conter todo o material necessário para a obtenção das fórmulas das figuras simples, inclui propriedades que permitem realizar demonstrações de diversos teoremas usando o conceito de área como ferramenta. O capítulo termina com a área do círculo e uma bastante precisa apresentação do número π.

Capítulo 1

O Teorema de Pitágoras

1.1 Leia um Pouco da História



Pitágoras (c.569 – c.480 a.C.) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto onde 50 anos antes tinha nascido Tales. Foi a partir das ideias desses dois grandes personagens que a Matemática se inicia como ciência e pode se desenvolver enormemente nos séculos seguintes.

Pitágoras viajou bastante. Esteve no Egito e na Babilônia (talvez tenha ido até a Índia) onde absorveu os conhecimentos matemáticos e as ideias religiosas de cada região. Voltando ao mundo grego, fundou

em Crotona (sudeste da Itália de hoje) uma escola, na verdade uma sociedade secreta, dedicada ao estudo da Matemática e Filosofia, principalmente. Como todos os documentos daquela época se perderam, tudo o que sabemos veio através de referências de outros autores que viveram séculos depois. Por isso, Pitágoras é uma figura obscura na história da Matemática e, para dificultar ainda mais as coisas, a sua escola, além de secreta, era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas eram comuns, pertenciam a todos. Assim, não sabemos sequer se foi o próprio Pitágoras que descobriu o teorema que leva o seu nome, pois era comum naquela época dar todo o crédito de uma descoberta ao mestre. Não conhecemos também qual foi a demonstração original, mas historiadores acreditam que deva ter sido alguma usando áreas.

O Teorema de Pitágoras é um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história do nosso conhecimento matemático. Foi onde tudo começou. Desde o século 5 a.C. até o século 20 d.C. inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras apareceram. Em 1940, o matemático americano E. S. Loomis publicou 370 demonstrações, mas ainda há mais.

Antes de Pitágoras (Na Babilônia)

Temos provas concretas que os babilônios antigos conheciam o Teorema de Pitágoras. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e hoje se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322 está na Uni-

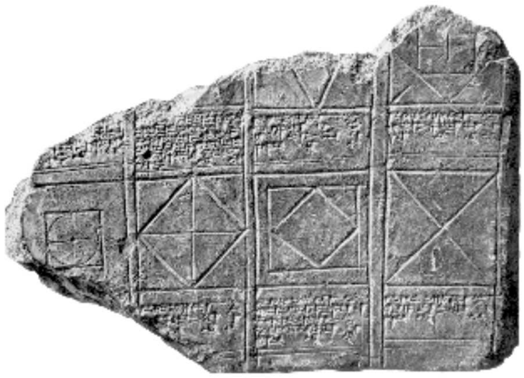
versidade de Columbia e o fragmento que foi preservado mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tabletes, não se sabe como esses números foram encontrados. Mas uma pista, que os babilônios conheciam alguma forma de encontrar esses números, está em um tablete guardado hoje no Museu Britânico. Nesse tablete está escrito o seguinte:

4 é o comprimento
5 é a diagonal
Qual é a altura?
4 vezes 4 dá 16
5 vezes 5 dá 25
Tirando 16 de 25 o resto é 9
Quanto vezes quanto devo tomar para ter 9?
3 vezes 3 dá 9
3 é a altura

Isto mostra, sem dúvida, que os babilônios tinham conhecimento da relação entre os lados de um triângulo retângulo. Não há nenhuma demonstração, naturalmente, pois isto ainda estava longe de ser uma preocupação dos matemáticos da época. Eles conheciam receitas que davam certo e, com elas, resolviam inúmeros problemas.

Um outro tablete que merece atenção está no museu da Universidade de Yale. É o único que contém figuras: um quadrado e suas diagonais. Neste fragmento de tablete que se pode ver a seguir, o lado

do quadrado é tomado como igual a 30 e o comprimento da diagonal aparece como 42, 25, 35.



Como os babilônios escreviam os números na base 60, o comprimento da diagonal é, na nossa notação decimal,

$$24 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3\,600} = 42{,}4263889.$$

Isto, dividido por 30, dá $1,414213...$, uma aproximação excepcional para $\sqrt{2}$ com seis casas decimais corretas.

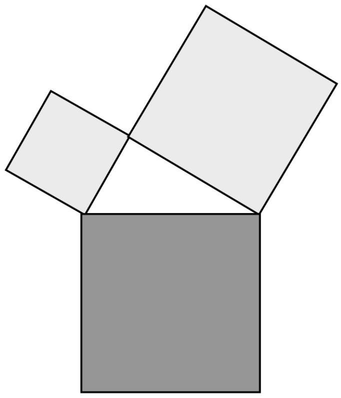
1.2 O Enunciado do Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos,

o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

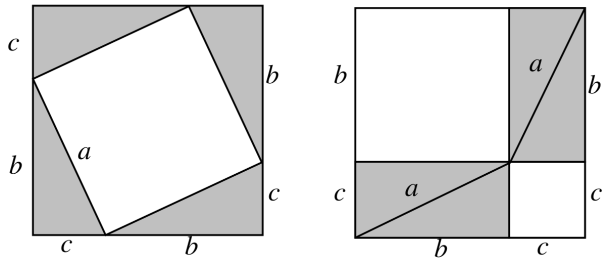


Observando a figura acima, o Teorema de Pitágoras afirma que a área sombreada em tom mais claro é igual à área mais escura.

Este fato não é evidente! Muito pelo contrário, é misterioso e intrigante. Para que possamos nos convencer da verdade dessa afirmação, precisamos de uma demonstração. Vamos ver algumas.

A demonstração clássica

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, considere o quadrado cujo lado é $b + c$.

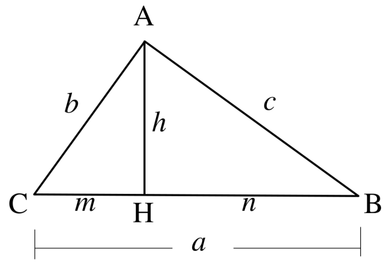


Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado $b+c$ quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado a. Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado $b+c$ os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado b e um quadrado de lado c. Logo, a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c.

Esta simples e engenhosa demonstração pode ter sido a que os pitagóricos imaginaram.

A demonstração que usa semelhança

Esta talvez seja a demonstração mais frequente. A partir de um triângulo ABC, retângulo em A, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.



Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos AHB e ABC, temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

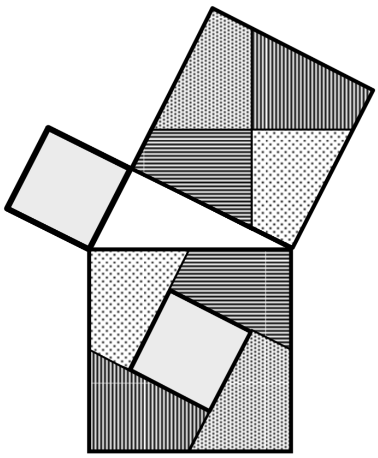
$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a \cdot a = a^2.$$

Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar as relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$, que também se interpreta com o conceito de área, e $h^2 = mn$, que revela o importante fato de que a altura é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

A demonstração de Perigal

Henry Perigal, um livreiro em Londres, publicou em 1873 a demonstração que se pode apreciar na figura a seguir. Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a

hipotenusa.



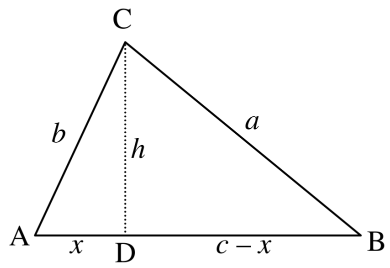
Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

1.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

A pergunta agora é: se a, b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$ será o triângulo de lados a, b, e c retângulo? Intuitivamente, pensamos que sim. Mas, devemos demonstrar isto. Consideremos então um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

1º caso: $A < 90^o$

Imaginemos que $b \leq c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB, cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$.



Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

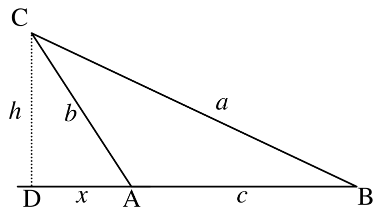
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, que contradiz a condição inicial.

2º caso: $A > 90^o$

Agora, o ponto D cai fora do lado AB.



Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a

$$a^2 \;=\; b^2 + c^2 + 2cx,$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

Demonstramos então que em um triângulo ABC, de lados a, b e c,

$$A < 90^{\text{o}} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^{\text{o}} \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $A = 90^{\text{o}}$.

1.4 Ternos Pitagóricos

O triângulo de lados 1, 3 e $\sqrt{10}$ é retângulo? Sim, pois

$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + 3^2.$$

Durante toda a história antiga e mesmo até hoje, temos curiosidade em encontrar triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros. Todos nós sabemos que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, mas você sabia que o triângulo de lados 372, 925 e 997 é retângulo? Possivelmente não, e eu também não o conhecia antes de redigir estas notas. Este é inclusive o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores que 1 000. Nossa curiosidade nos leva a seguinte pergunta:

"Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?"

Definição. *Sendo a, b e c inteiros positivos com $b < c < a$ dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ são exemplos de ternos pitagóricos.*

Um terno pitagórico (b, c, a) é chamado primitivo, quando b e c são primos entre si, ou seja, quando $\text{mdc}(b, c) = 1$. Assim, $(3, 4, 5)$ é um terno pitagórico primitivo. Naturalmente, qualquer terno da forma $(3k, 4k, 5k)$ com k inteiro e maior que 1 é também pitagórico, mas não primitivo.

Uma fórmula que gera ternos pitagóricos

Sendo m e n inteiros positivos com $m > n$ considere:

$$b = m^2 - n^2, \quad c = 2mn, \quad a = m^2 + n^2.$$

Veja que (b, c, a) é um terno pitagórico pois:

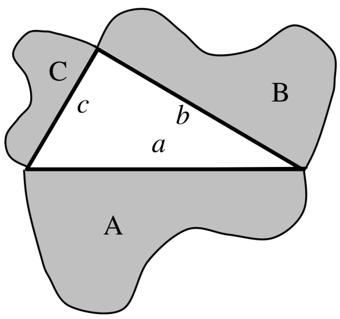
$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2 = a^2.$$

Assim, para qualquer escolha de números inteiros m e n, o terno (b, c, a) é pitagórico. Por exemplo, para $m = 7$ e $n = 4$ encontramos o terno pitagórico $(33, 56, 65)$. Observe que, se nesta fórmula você atribuir para m e n valores ambos pares ou ambos ímpares, você encontrará um terno pitagórico não primitivo, pois todos os termos do terno serão pares. Se a sua escolha de m e n conduzir a valores de

b e c que sejam primos entre si, você encontrará um terno pitagórico primitivo. Esta fórmula é atribuída a Platão (séc.4 a.C.), mas existem outras que você verá nos exercícios.

1.5 Generalizando o Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, imaginemos figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.



Sejam então A, B e C as áreas de figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura acima. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então,

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad ou \quad \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad ou \quad \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Portanto,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Pela propriedade das proporções, como $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$. Isto quer dizer que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Esta é uma generalização do teorema de Pitágoras.

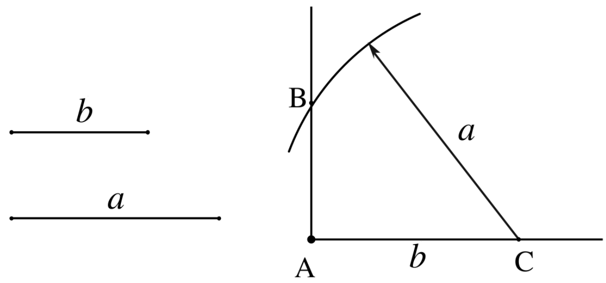
1.6 Construções Geométricas e o Triângulo Retângulo

Construções iniciais

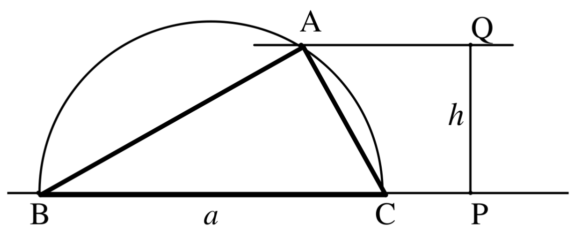
Construir um triângulo retângulo conhecendo dois de seus lados não é difícil.

a) Se os dois catetos são conhecidos, traçamos duas semirretas perpendiculares e, com o compasso, transportamos sobre elas as medidas dos catetos.

b) Se conhecemos a hipotenusa e um dos catetos, traçamos novamente as duas semirretas perpendiculares, assinalamos sobre uma delas o cateto $AC = b$ e, com centro em C, traçamos uma circunferência de raio a, que determina na outra semirreta o vértice B.



c) Suponha agora que se conheça a hipotenusa ($BC = a$) e a altura relativa a ela ($AH = h$). Como o triângulo retângulo pode ser inscrito em uma semicircunferência cujo diâmetro é a hipotenusa, fazemos o seguinte. Traçamos a circunferência de diâmetro $BC = a$ e, sobre uma perpendicular à reta BC traçamos o segmento $PQ = h$. A paralela a BC traçada por Q determina o vértice A sobre a semicircunferência.



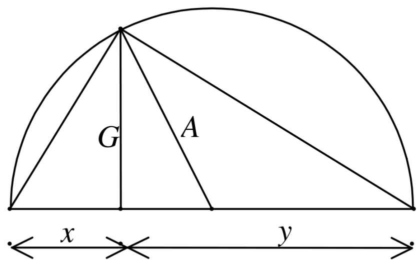
A média aritmética e a média geométrica

Dados dois números positivos x e y definimos a média aritmética e a média geométrica deles da seguinte forma:

$$\text{média aritmética: } A = \frac{x+y}{2};$$

$$\text{média geométrica: } G = \sqrt{xy}.$$

Dados dois segmentos quaisquer, sejam x e y suas medidas. Podemos visualizar estas duas médias no desenho abaixo. O diâmetro da semicircunferência é $x + y$, o segmento que representa a média aritmética é o raio, e o segmento que representa a média geométrica é a altura do triângulo retângulo que possui x e y como as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Então $G \leq A$ e $G = A$ equivale a $x = y$.



Vamos mostrar agora a solução gráfica de uma equação do tipo

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0.$$

Inicialmente, explicaremos por que a equação está escrita desta forma. Nas construções geométricas, cada letra representa um segmento. Por sua vez, cada segmento representa um número real positivo que é a sua medida em uma certa unidade. Antigamente, há dois mil anos, não existia o conceito de número real. A palavra número significava, na Grécia antiga, número natural. As frações existiam, mas não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. De qualquer forma, o que chamamos hoje de números racionais, já existiam, mas os números irracionais ainda estavam muito longe de serem

descobertos. Para contornar esta dificuldade, os gregos imaginaram uma solução genial: representar todas as grandezas por segmentos de reta. Eles, naturalmente, não conseguiam medir todos os segmentos, porque não tinham números suficientes, mas isto não importava. Toda grandeza podia ser representada por um segmento de algum tamanho. As operações de adição e subtração podem ser feitas com segmentos. Um segmento pode ser multiplicado por um número natural ou dividido em qualquer número de partes iguais.

As construções geométricas nada mais são que operações com segmentos. Além de somar, subtrair, multiplicar ou dividir por número natural, o que mais se pode fazer com recursos exclusivamente gráficos, usando basicamente a régua e o compasso? Muita coisa, desde que se perceba que regras são naturalmente impostas.

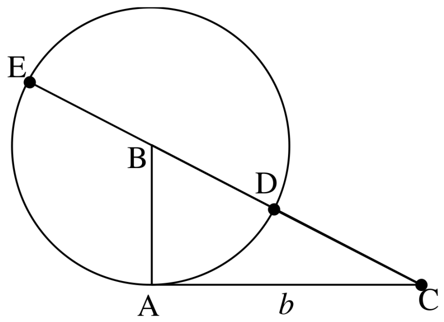
Em primeiro lugar, se a e b são segmentos, não existe nada, por exemplo, que se represente por $a^2 + b$. Isto porque a^2 é a área de um quadrado de lado a que, naturalmente, não pode ser somado com um segmento. Portanto, contas que hoje fazemos sem preocupação com números naturais, não tinham significado no passado. Assim, a equação $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, que vamos resolver, tinha antigamente o seguinte significado.

Os segmentos a e b são dados. A solução da equação é o segmento x, tal que a área do quadrado de lado x somada com a área do quadrado de lado b é igual à área do retângulo, cuja base é o dobro de a e cuja altura é x. Para encontrar este segmento x vamos, inicialmente,

aplicar a conhecida fórmula da equação do segundo grau:

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4b^2}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Esta expressão é fácil de construir, pois $\sqrt{a^2 - b^2}$ representa um dos catetos de um triângulo retângulo que possui hipotenusa a e o outro cateto igual a b. Portanto, dados dois segmentos a e b com $a > b$ construímos o triângulo ABC com cateto $AC = b$ e hipotenusa $BC = a$ e as soluções x_1 e x_2 da equação $x^2 - 2ax + b^2 = 0$ estão na figura a seguir:

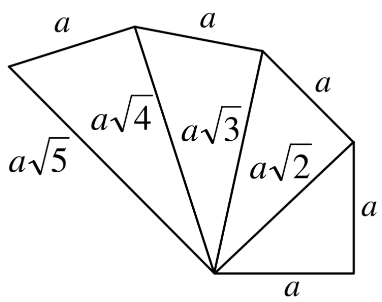


Nesta figura, $AC = b$, $CB = a$, $BA = BD = BE = \sqrt{a^2 - b^2}$ e, portanto, $CD = x_1 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ e $CE = a + \sqrt{a^2 - b^2}$.

Segmentos do tipo $a\sqrt{n}$

Observe que, dado um segmento a, obter o segmento $a\sqrt{2}$ é muito fácil. Basta desenhar um triângulo retângulo com os dois catetos iguais a a. A hipotenusa desse triângulo é igual a $a\sqrt{2}$. Na figura a seguir, mostramos que, traçando segmentos de comprimento a, per-

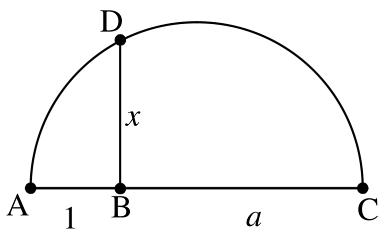
pendiculares à hipotenusa de cada triângulo anterior, obtemos a sequência de segmentos $a\sqrt{n}$, com n natural.



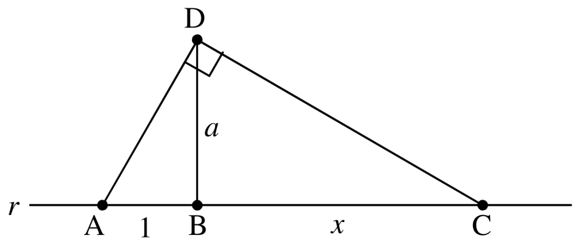
Construções com a unidade de medida

Dados os segmentos a e b, você já sabe como construir, por exemplo, os segmentos $2a$, $b\sqrt{3}$ e $a\sqrt{n}$. Perguntamos agora se, dado um segmento a, é possível construir segmentos tipo $\sqrt{a}$ ou a^2. A resposta é ao mesmo tempo não e sim. Observe que, nas construções anteriores, os segmentos construídos eram independentes da unidade de medida. Por exemplo, dados dois segmentos a e b, não há sequer necessidade de estabelecer uma unidade de medida de comprimento para conhecer $\sqrt{a^2 + b^2}$. Neste sentido, não se pode representar a por um segmento. Se estabelecermos que a unidade de medida é igual a a, então $a^2 = a$, mas se estabelecermos que a unidade de medida é a metade de a, então a^2 é o dobro de a. Fica claro então que, para representar $\sqrt{a}$ ou a^2 por segmentos, devemos estabelecer antes uma unidade de medida, e saber que os resultados serão diferentes para cada unidade escolhida.

a) Dado o segmento a, para construir $\sqrt{a}$ fazemos o seguinte. Desenhamos na mesma reta os segmentos $AB = 1$ e $BC = a$. Em seguida, desenhamos a semicircunferência de diâmetro AC e o segmento $BD = x$, perpendicular a AC. É fácil ver que $x = \sqrt{1 \cdot a} = \sqrt{a}$.



b) Dado o segmento a, para construir a^2 fazemos o seguinte. Sobre uma reta r, desenhamos o segmento $AB = 1$ e na perpendicular a r passando por B desenhamos $BD = a$. A perpendicular a AD passando por D encontra a reta r em C, e é fácil ver que $BC = x = a^2$.



Observação. *Não é possível construir um segmento do tipo* $a\sqrt[3]{2}$ *nem com a unidade. Na verdade, só podemos construir quando o índice da raiz for potência de* 2.

1.7 Problemas

1) Determine todos os triângulos retângulos cujos lados são inteiros e estão em progressão aritmética.

2) É dado um quadrado $ABCD$ de lado a. Determine o raio da circunferência que contém os vértices A e B e é tangente ao lado CD.

3) O triângulo ABC tem lados $AB = \sqrt{12}$, $BC = 4$ e $CA = \sqrt{20}$. Calcule a área de ABC.

4) Os lados de um triângulo medem 3, 4 e x. Determine para que valores de x esse triângulo é obtusângulo.

5) Se $b = 2k+1$, $c = 2k^2+2k$, $a = 2k^2+2k+1$, onde k é um inteiro positivo, mostre que (b, c, a) é um terno pitagórico.

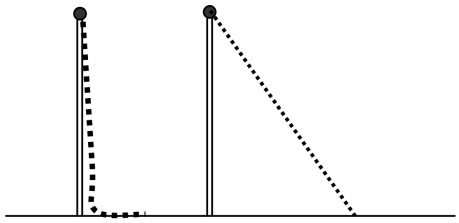
6) Os três lados de um triângulo retângulo são números inteiros. Um dos catetos mede 17. Qual é o perímetro desse triângulo?

7) Em um triângulo retângulo de perímetro p, a altura relativa à hipotenusa é h. Calcule o comprimento da hipotenusa em função dos elementos dados.

8) Sendo b, c e h os catetos e a altura de um triângulo retângulo, mostre que $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

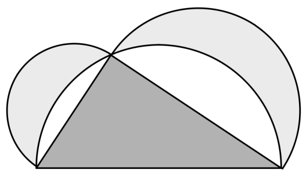
9) O antigo livro chinês *Jiuzhang suanshu* contém 246 problemas. Para a solução de alguns, é necessário o uso do *gou gu*, ou seja, do Teorema de Pitágoras. Veja um desses problemas traduzido do Capítulo 9 do *Jiuzhang*. No alto de um bambu vertical está

presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 3 *chih*. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de 8 *chih* do pé do bambu. Que comprimento tem o bambu?



10) Em um triângulo ABC, retângulo em A, trace a altura AH. Mostre que a soma das áreas dos círculos inscritos nos triângulos AHB e AHC é igual a área do círculo inscrito em ABC.

11) *O problema de Hipócrates.*
A figura a seguir mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados como diâmetros. Mostre que a soma das áreas das duas "lúnulas" sombreadas é igual à área do triângulo.



12) Em um triângulo ABC, as medianas que partem de A e B são perpendiculares. Se $BC = 8$ e $AC = 6$, calcule AB.

13) Se b e c são os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a e altura h, mostre que $b + c < a + h$.

14) O ponto P é interior ao retângulo $ABCD$ e tal que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$. Calcule PD.

15) Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo cujos lados medem 6 cm, 6 cm e 4 cm.

16) Duas cordas perpendiculares AB e CD de uma circunferência cortam-se em P. Se $PA = a$, $PB = b$, e $PC = c$, calcule o raio da circunferência.

Construções Geométricas

17) Dados os segmentos a, b e c, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

18) Resolva graficamente: um retângulo tem 24 cm de perímetro e 25 cm^2 de área. Construa este retângulo.

19) Dado um segmento de comprimento a, construa um segmento cujo comprimento é $a\sqrt{14}$.

20) Dados os segmentos a e b, construa $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$.

21) Dados os segmentos a e b, construa o segmento $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Mais difíceis

22) Duas circunferências de raios R e r são tangentes exteriormente e são tangentes a uma reta t nos pontos A e B.

    (a) Determine AB em função dos dois raios.

(b) Determine a seguir o raio de uma circunferência que é tangente à reta t e às duas circunferências dadas

23) No triângulo ABC, retângulo em A, traçam-se a altura AH e os segmentos HE e HF, perpendiculares a AB e AC, respectivamente. Se $BE = p$ e $CF = q$, mostre que $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$, onde a é a hipotenusa do triângulo ABC.

24) Um ponto P interior a um quadrado $ABCD$ é tal que $PA = a$, $PB = b$ e $PC = b + c$, onde os números a, b e c satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Mostre que o ângulo BPC é reto.

Capítulo 2

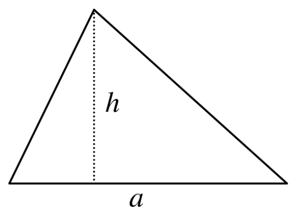
Áreas

Os alunos, em geral, trabalham com áreas desde muito cedo. Vamos então, neste capítulo, imaginar que as fórmulas que calculam áreas das figuras simples como o quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio sejam conhecidas.

Inicialmente, daremos toda atenção ao triângulo. Conhecendo bem o triângulo, não teremos dificuldade nos polígonos pois, afinal, eles podem ser decompostos em triângulos. Com certeza, você já sabe calcular a área de um triângulo, fazendo a metade do produto da base pela altura.

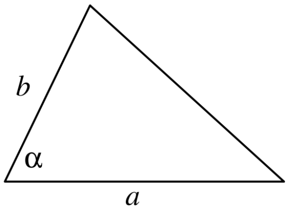
1. A fórmula tradicional.

$$S = \frac{ah}{2}$$



2. Se você já conhece um pouco de trigonometria, a fórmula seguinte é muito boa.

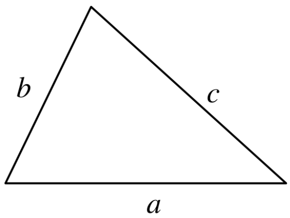
$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\alpha$$



3. Quando os três lados são conhecidos, calcular a altura ou um dos ângulos dá algum trabalho. Nesse momento, a fórmula de Heron é ótima (não daremos aqui a demonstração dela).

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

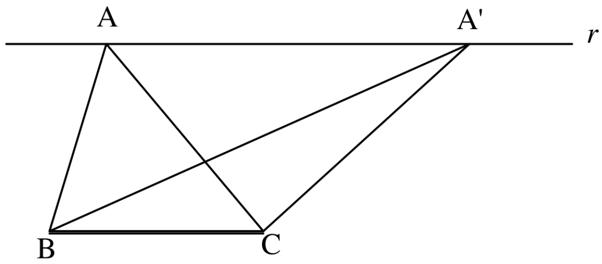


Vamos tratar agora do mais importante: as propriedades.

2.1 Propriedades Importantes

Propriedade 1

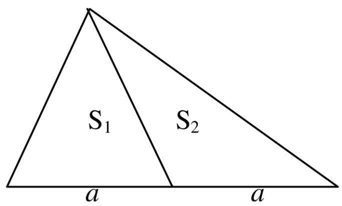
A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



Na figura acima, a reta r é paralela a BC. Os triângulos ABC e $A'BC$ têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura.

Propriedade 2

Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.



$S_1 = S_2$

De fato, os dois triângulos interiores possuem mesma base e mesma altura. Logo, possuem mesma área.

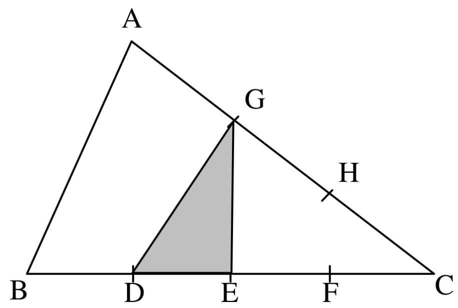
Quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, o enunciado desta propriedade pode ser: “Uma mediana divide o triângulo em dois outros equivalentes.”

Antes de prosseguir com as propriedades, vamos resolver dois exercícios cujos enunciados não são comuns nos livros didáticos atuais.

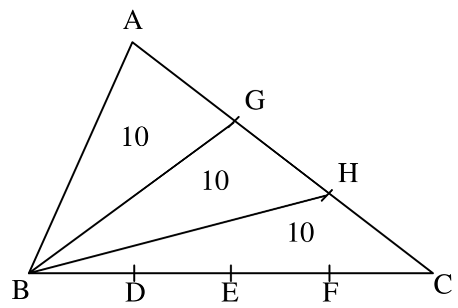
"principal"
2010/4/19
page 27
Estilo OBME

Exercício 1

O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais, pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H. Qual é a área do triângulo GDE?

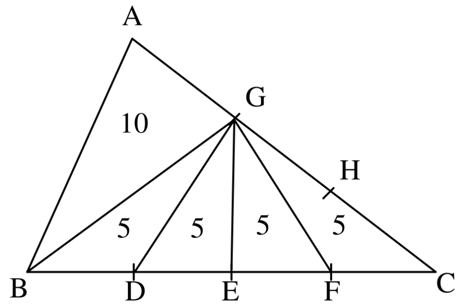


Solução: Observe o triângulo ABC com as cevianas BG e BH.



Pela propriedade 2 os triângulos BAG, BGH e BHC têm mesma área. Cada um tem, portanto, área igual a 10 e o triângulo BGC tem área igual a 20.

Observe agora o triângulo BGC com as cevianas GD, GE e GF.

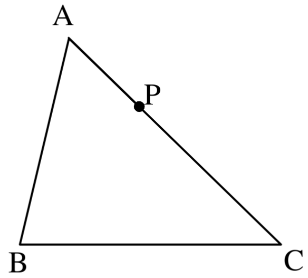


Pela mesma propriedade, os triângulos GBD, GDE, GEF e GFC têm mesma área. Logo, cada um deles tem área 5. A área do triângulo GDE é igual a 5.

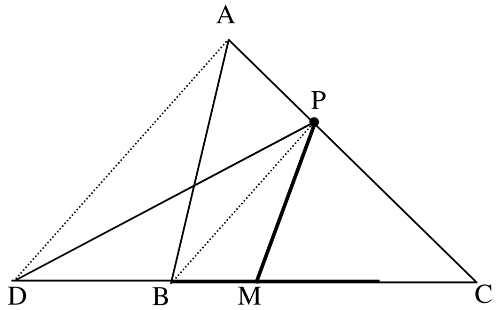
Repare que a solução do problema não necessitou de fórmulas. Uma propriedade simples e convenientemente aplicada resolveu a questão. Vamos ver outro problema.

Exercício 2

É dado um triângulo ABC e um ponto P do lado AC mais próximo de A que de C. Traçar uma reta por P que divida o triângulo ABC em duas partes de mesma área.



Solução: Façamos o seguinte. Trace BP e uma paralela a BP por A que encontra a reta BC em D.

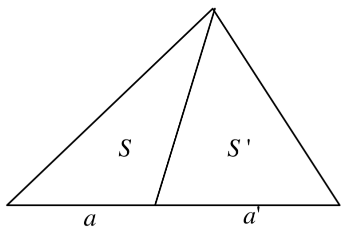


Os triângulos ABP e DBP têm áreas iguais pela propriedade 1. Assim, o triângulo PDC tem mesma área que o triângulo ABC. Mas, tomando o ponto médio M de DC, a reta PM divide PDC em duas partes de mesma área (propriedade 2). Logo, PM divide também ABC em duas partes de mesma área.

Vamos continuar com mais duas propriedades importantes.

Propriedade 3

Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.

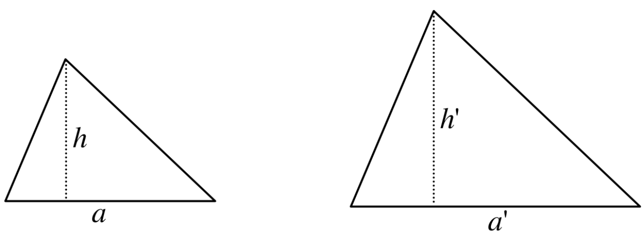


$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases a e a' e alturas h e h'.



Como são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre

as alturas. Esse número é a razão de semelhança das duas figuras:

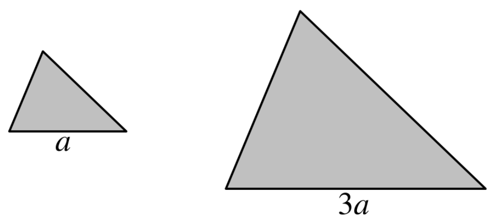
$$k = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}.$$

Porém, se S e S' são as áreas dos dois triângulos temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{ah/2}{a'h'/2} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2.$$

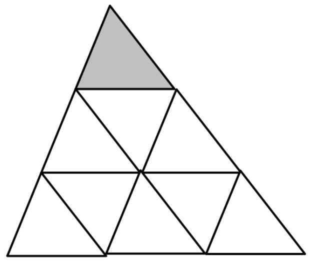
Vejamos um exemplo simples.

Os dois triângulos da figura abaixo são semelhantes. Se a área do menor é igual a 8, qual é a área do maior?



Para esta pergunta, alunos têm uma tendência irresistível de responder rapidamente que a área do triângulo maior é 24. Porém, isto não é verdade. A razão de semelhança dos dois triângulos é $k = 1/3$ e, portanto, a razão entre suas áreas é $1/9$. Daí, se a área do menor é igual a 8, a área do maior é 72.

Você pode ver esta relação na figura a seguir. Realmente, o triângulo pequeno cabe 9 vezes dentro do grande.



A propriedade 4, que mostramos para triângulos, vale naturalmente para polígonos, pois estes podem ser divididos em triângulos. Mas, é importante saber que esta propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes.

A razão entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

O exercício a seguir, caiu em um vestibular da FGV-RJ.

Exercício 3

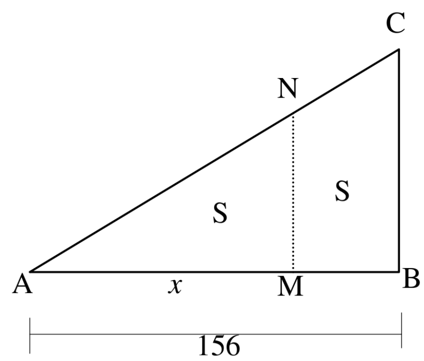
Em algum momento, na primeira metade do século passado, uma pessoa chamada Afrânio tinha um valioso terreno desocupado, perto do centro da cidade do Rio de Janeiro. Com a urbanização da cidade, ruas novas foram abertas e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo ABC, retângulo em B, ainda de grande valor, pois o lado AB media 156 metros. Pois bem, Afrânio morreu e em seu testamento os advogados encontraram as instruções para dividir o terreno "igualmente" entre seus dois filhos. Era assim: "um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB, de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham mesmo valor; o que

tem a forma de um trapézio será do meu filho mais velho e o outro será do mais novo".

Os advogados concluíram que os terrenos deviam ter mesma área, pois o testamento dizia que deveriam ter mesmo valor. Mas não foram capazes de decidir em que posição deveria ficar o muro. Conta meu avô que o episódio ganhou as páginas dos jornais por vários dias, com leitores opinando de diversas maneiras sobre a posição correta do muro. Ele falava e se divertia muito com as opiniões absurdas mas, ao mesmo tempo, me instigava a resolver o problema. E o problema retorna para vocês.

Em que posição, relativamente ao lado AB do terreno, o muro deve ser construído?

Solução:



Na figura acima, MN é o muro que deve ser construído perpendicularmente ao lado AB. Seja $AM = x$, de forma que o triângulo AMN e o trapézio $MBCN$ tenham mesma área S. Os triângulos AMN e ABC são semelhantes e a razão de semelhança entre eles é $x/156$.

Como a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança devemos ter:

$$\frac{S}{2S} = \left(\frac{x}{156}\right)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados ficamos com

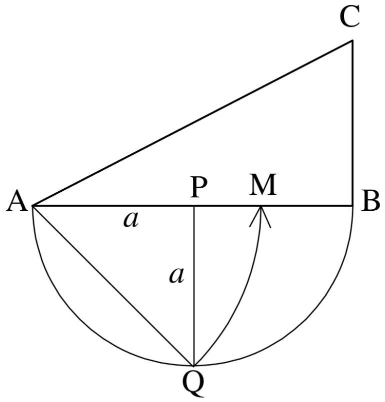
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{156}$$

o que dá $x = 78\sqrt{2} \cong 110$. Temos a solução. O muro deve ser construído a 110 metros de A. As áreas dos dois terrenos serão iguais e Afrânio ficará feliz em ver sua vontade atendida.

A construção geométrica do exercício 3

Acabamos de resolver o problema da divisão do terreno em duas partes de mesma área. Mas como poderemos fazer isto utilizando apenas a régua e o compasso? Imagine que o engenheiro tem a planta do terreno e deseja desenhar o muro na posição exata, sem contas, sem aproximações. Vamos ver como se faz isto.

Resolva o problema novamente considerando AB= $2a$. Você vai encontrar $AM = a\sqrt{2}$. Faça então o seguinte. Pelo ponto P, médio de AB trace uma perpendicular PQ a AB de comprimento a como na figura seguinte:

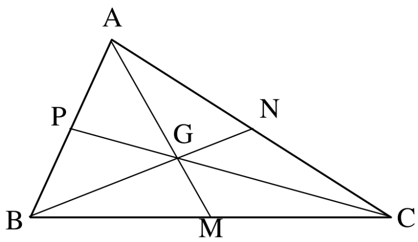


Como $AQ = a\sqrt{2}$, transfira com o compasso essa medida para a reta AB, encontrando a posição exata de M.

Exercício 4

As medianas de um triângulo dividem esse triângulo em 6 outros triângulos. Mostre que todos têm mesma área.

Solução: Representemos por (ABC) a área de um triângulo ABC.



Seja $(ABC) = S$. O ponto de interseção das medianas é G, o

baricentro. Sabemos que $BG = 2/3 \cdot BN$. Logo,

$$(ABC) = \frac{2}{3}(ABN) = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{3}.$$

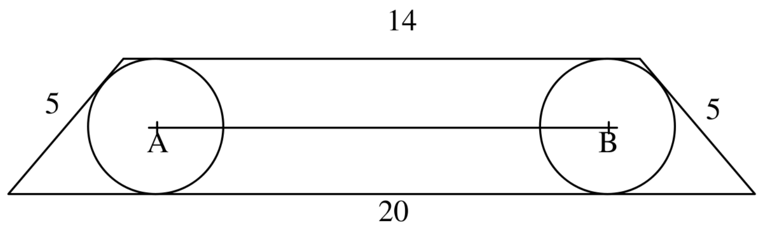
Analogamente, $(BCG) = (CAG) = S/3$. Mas GP é mediana no triângulo ABG. Daí, $(APG) = (BPG) = S/6$. Assim, os seis triângulos têm área $S/6$.

Usando Áreas

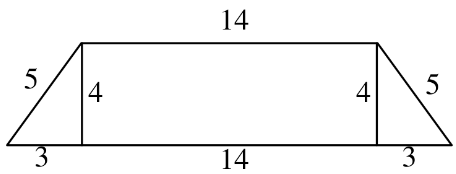
O estudante pensa, em geral, que um problema sobre áreas significa sempre calcular a área de alguma figura. Na verdade não é só isso. A ferramenta "área" pode ser usada na solução de diversos problemas de geometria plana de aparência algo complicada. Veja um exemplo.

Exercício 5

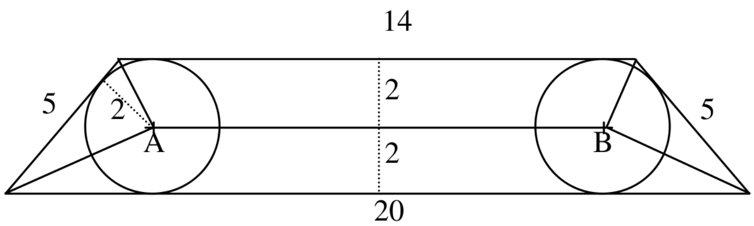
A figura a seguir mostra um trapézio com bases medindo 20 cm e 14 cm e com os outros dois lados medindo 5 cm cada um. Duas circunferências com centros A e B são tangentes às bases, uma ao lado esquerdo e outra ao lado direito. Pergunta-se qual é o comprimento do segmento AB.



Solução: Vamos inicialmente calcular a altura do trapézio, que é o diâmetro de cada circunferência. Dividindo o trapézio em um retângulo e dois triângulos retângulos iguais, temos a evidente situação seguinte:



A altura do trapézio mede 4 cm e o raio de cada circunferência mede 2 cm. Vamos agora ligar os dois vértices da esquerda ao ponto A e os dois vértices da direita ao ponto B. Vemos agora o trapézio original dividido em dois outros trapézios e dois triângulos iguais.



Lembrando que a área do trapézio é o produto da base média pela altura e observando que os dois triângulos de vértices A e B têm base igual a 5 e altura igual a 2, vamos escrever a equação que diz que a soma das áreas dessas quatro figuras é igual à área do trapézio original. Fazendo $AB = x$, temos:

$$\frac{(20+x)\cdot 2}{2} + \frac{(14+x)\cdot 2}{2} + 2\cdot\frac{5\cdot 2}{2} = \frac{(20+14)\cdot 4}{2}.$$

Isto dá $x = 12$, resolvendo nosso problema.

É claro que outra forma de resolver pode ser conseguida com outros meios. O que desejamos enfatizar é que a ferramenta "área" muitas vezes é útil para resolver problemas diversos. Nesse caso, ela propiciou uma solução limpa e elegante.

2.2 Número π

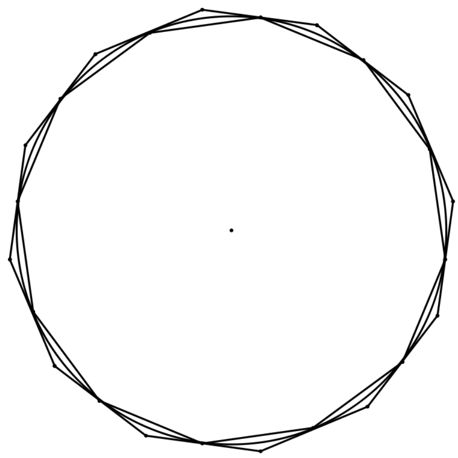
O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Esta razão dá sempre o mesmo valor, ou seja, independe da circunferência, porque duas circunferências quaisquer são semelhantes. Todas as circunferências são semelhantes entre si. Se C é o comprimento da circunferência de raio R, então por definição:

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Mas, o que é o comprimento de uma circunferência? Nós sabemos o que é o comprimento de um segmento, mas temos apenas uma ideia intuitiva do que seja o comprimento de uma circunferência. Podemos pensar em passar um barbante bem fino em volta da circunferência, esticá-lo e medir seu comprimento com uma régua. Isto dá uma boa ideia do que seja o comprimento da circunferência, mas este método experimental permite apenas avaliar (com pouca precisão) essa medida. Vamos tornar mais preciso este conceito.

O comprimento da circunferência é, por definição, o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos regu-

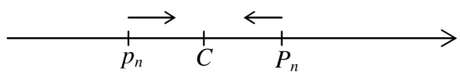
lares inscritos e cujas aproximações por excesso são os perímetros dos polígonos regulares circunscritos.



Observe a figura anterior. Você vê uma circunferência com um dodecágono regular inscrito e outro circunscrito. Pense agora nesta situação com polígonos regulares de n lados. Se C é o comprimento da circunferência, p_n o perímetro do polígono inscrito e P_n o perímetro do circunscrito temos, por definição,

$$p_n < C < P_n.$$

Quando n cresce, os valores de p_n aumentam, os de P_n diminuem e ambos se aproximam cada vez mais de C.



Sendo R o raio da circunferência, as razões $\frac{p_n}{2R}$ e $\frac{P_n}{2R}$, quando n

cresce, vão se aproximando, uma por um lado e outra pelo outro, de $\dfrac{C}{2R}$, ou seja, de π.

Veja, a seguir, estas aproximações para alguns valores de n.

n	$\dfrac{p_n}{2R}$	$\dfrac{P_n}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14156	3,14167

Repare no quadro acima, que os valores das duas colunas vão se aproximando, mas para polígonos de 384 lados só conseguimos corretas as três primeiras decimais.

O número π é um número irracional, aproximadamente igual a 3,1416. O uso da letra grega π para representar a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro deve-se a Euler, que a adotou em 1 737. Mas esta razão sempre fascinou matemáticos e curiosos em toda a história. Hoje conhecemos mais de cinco bilhões de casas decimais de π e os fanáticos em computação vão em breve aumentar em muito esse número.

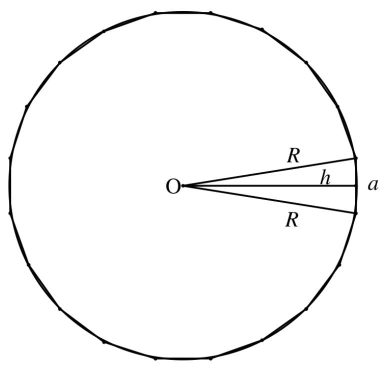
A área do círculo

Continuando com a ideia dos polígonos, a área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares inscritos.

Imaginemos um polígono regular com n lados (n bem grande) inscrito na circunferência de raio R. Dividamos o polígono em triângulos isósceles iguais, todos com vértice no centro da circunferência. Cada triângulo tem dois lados iguais a R, um lado igual a a, lado do polígono, e altura h relativa a essa base.

A área do polígono é $A_n = n\dfrac{ah}{2} = \dfrac{(na)h}{2} = \dfrac{p_n h}{2}$, onde p_n é o perímetro do polígono. Quando n cresce indefinidamente, p_n tende ao comprimento da circunferência e h tende ao raio. A área do círculo é então:

$$S = \frac{2\pi RR}{2} = \pi R^2.$$

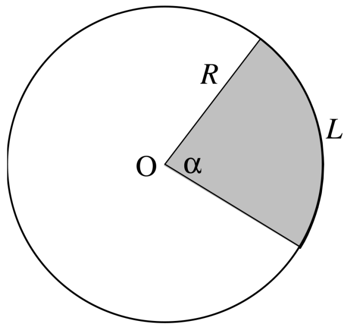


Áreas de setores circulares

Frequentemente precisaremos calcular áreas de setores circulares. Repare que a área de um setor de um círculo é proporcional ao ângulo central, ou ainda, proporcional ao comprimento de seu arco. Para justificar isto, basta observar que dobrando o ângulo central a área do setor dobra, triplicando o ângulo central a área do setor triplica, e assim por diante.

Assim, se o ângulo central tem medida α em graus, a área do setor é

$$S = \frac{\alpha}{360}\pi R^2.$$



Por outro lado, como a área do setor também é proporcional ao comprimento L do seu arco, podemos exprimir essa área assim:

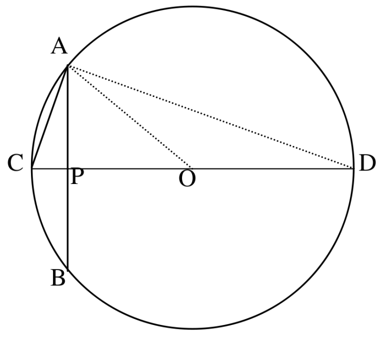
$$S = \frac{L}{2\pi R}\pi R^2 = \frac{LR}{2}$$

uma fórmula bastante interessante, pois dá a idéia de um “triângulo” de base de comprimento L e altura R.

Apêndice
O Cálculo de π pelo Método dos Polígonos

Os matemáticos antigos, até o século 16 (e, portanto, antes da invenção do Cálculo), tentaram obter valores de π usando polígonos regulares inscritos na circunferência com número de lados cada vez maior. Vamos mostrar como faziam isto. A ideia era tomar um polígono pequeno e ir dobrando o número de lados.

Na figura a seguir, $l_n = AB$ é o lado do polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio 1. Se C é o ponto médio do arco AB, então $AC = l_{2n}$ é o lado do polígono regular de $2n$ lados inscrito na mesma circunferência.



Sendo CD o diâmetro, O o centro da circunferência e P o ponto de interseção de AB com CD temos, no triângulo retângulo ACD, a relação $AC^2 = CD \cdot CP$. Observe que $AC = l_{2n}$ e

$$OP = \sqrt{1 - \frac{(l_n)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - (l_n)^2}.$$

Daí,

$$(l_{2n})^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{4-(l_n)^2}\right) = 2 - \sqrt{4-(l_n)^2}.$$

Assim,

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4-(l_n)^2}}.$$

Esta bela fórmula permite calcular o lado de um polígono regular de $2n$ lados inscrito em uma circunferência de raio 1 em função do lado do polígono regular de n lados inscrito na mesma circunferência. Como o lado do quadrado inscrito na circunferência de raio 1 é $l_4 = \sqrt{2}$, podemos facilmente prosseguir e encontrar:

$$l_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$l_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$l_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$l_{64} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

e assim por diante. Repare que $64 = 2^6$ e a expressão que calcula o lado do polígono de 64 lados possui 5 radicais. Lá dentro o primeiro sinal é negativo e todos os outros são positivos. Como cada vez que dobramos o número de lados acrescentamos mais um radical, o lado

de um polígono regular de 2^{n+1} lados é:

$$l_{2_{n+1}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}} \qquad \text{com } n \text{ radicais.}$$

O perímetro do polígono 2^{n+1} lados é igual a $2^{n+1} \cdot l_{2^{n+1}}$, que tende a 2π quando n cresce. Assim, aproximações de π podem ser obtidas por:

$$\pi \cong 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

com n radicais na expressão acima.

O leitor que chegou até aqui deve estar pensando que pode calcular por este método qualquer número de casas decimais de π. Infelizmente, isto não é verdade. Seria, se o leitor tivesse uma calculadora que trabalhasse com infinitas casas decimais. Mas esta calculadora ainda não foi inventada. Observe que, na expressão acima, temos um produto, onde o primeiro fator é muito grande e o segundo muito pequeno. Se a sua calculadora trabalha com, por exemplo, 12 dígitos, não é possível aumentar muito o valor de n. O segundo fator vai perdendo precisão e o resultado idem. Os matemáticos antigos calculavam essas raízes manualmente, com um número absurdo de casas decimais, para conseguirem obter umas poucas casas decimais precisas de π.

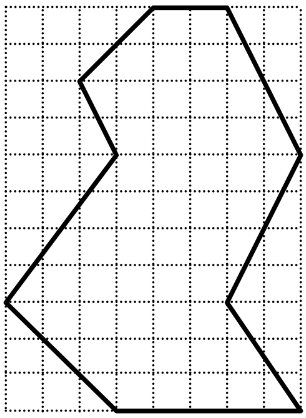
O recorde ainda está com L. van Ceulen que conseguiu 35 casas decimais exatas. Como morreu logo em seguida, a viúva mandou

gravar esse valor de π em sua lápide:

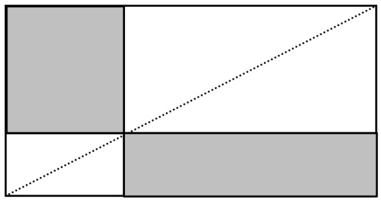
3,14159265358979323846264338327950288

2.3 Problemas

1) Na figura a seguir, cada quadrícula representa uma unidade de área. Qual é a área do polígono que aparece no interior do quadriculado?



2) Observe a figura a seguir. Por um ponto da diagonal do retângulo foram traçadas paralelas a seus lados. Mostre que as áreas dos retângulos sombreados são iguais.



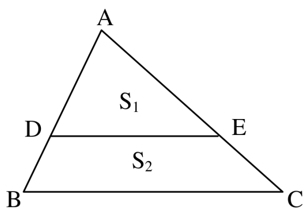
3) Do pentágono $ABCDE$ sabe-se o seguinte: $A = E = 90^{\text{o}}$, $B = C = 120^{\text{o}}$, $AB = CD = 4$ e $BC = 8$. Calcule a área desse pentágono.

4) O triângulo ABC tem lados medindo 5 cm, 7 cm e 8 cm. Calcule sua área e o raio da circunferência inscrita.

5) No paralelogramo $ABCD$ de área 1, os pontos P, Q e R, nesta ordem, dividem a diagonal AC em quatro partes iguais. Qual é a área do triângulo DPQ?

6) No triângulo ABC de área 1, as medianas BM e CN cortam-se em G. Qual é a área do triângulo GMN?

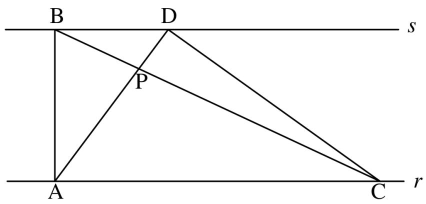
7) Na figura a seguir, $AD = \frac{2}{3}AB$ e $AE = \frac{2}{3}AC$. O segmento DE divide o triângulo em duas partes: um triângulo de área S_1 e um trapézio de área S_2. Qual destas duas áreas é maior?



8) Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas e o segmento AB é perpendicular a ambas. Os segmentos AD e BC cortam-se em P.

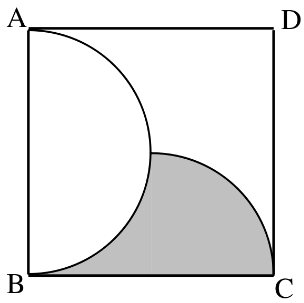
(a) Mostre que as áreas dos triângulos PAB e PCD são iguais.

(b) Dados $AB = 10$, $BD = 7$ e $AC = 18$, calcule a área do triângulo PDC.

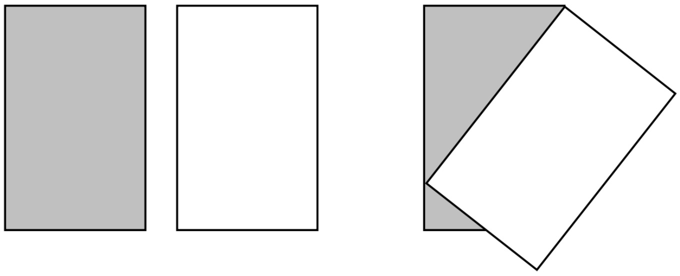


9) No máximo, quantos triângulos equiláteros de lado 1 cabem (sem superposição) dentro de um hexágono regular de lado 12?

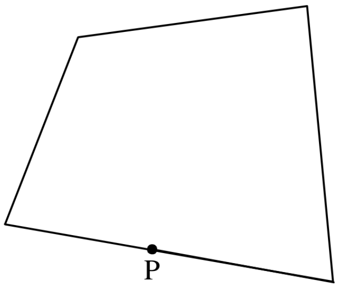
10) No interior do quadrado $ABCD$ de lado 1 da figura abaixo foram traçadas as semicircunferências de diâmetros AB e BC. Qual é o valor da área sombreada?



11) Abaixo você vê dois retângulos iguais. Colocando um sobre o outro, como mostra a figura, determine se o retângulo de cima cobriu mais da metade do retângulo de baixo, exatamente a metade ou menos da metade.



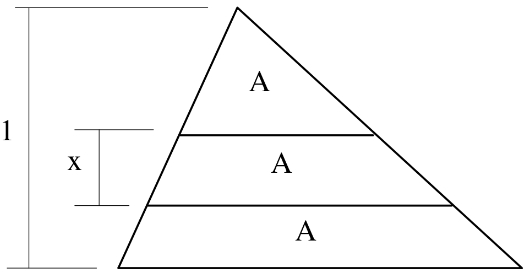
12) Usando apenas seus instrumentos de desenho, trace por P uma reta que divida o quadrilátero da figura abaixo em duas partes de mesma área.



13) $ABCDEF$ é um hexágono regular. Os pontos M, N e P são médios dos lados AB, CD e EF. Qual é a razão entre a área do triângulo MNP e a área do hexágono?

14) Um hexágono regular e um triângulo equilátero estão inscritos na mesma circunferência. Qual é a razão entre as áreas dessas duas figuras?

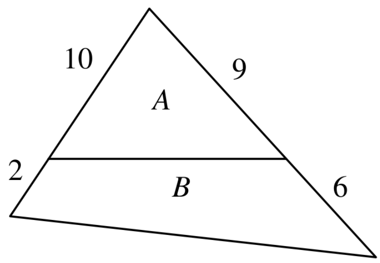
15) A figura abaixo mostra um triângulo de altura 1 dividido por duas retas paralelas à sua base em três partes de mesma área. Qual é a altura do trapézio central?



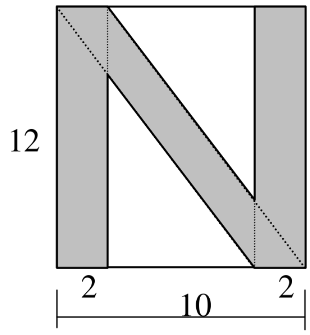
16) Em qualquer triângulo ABC, mostre que sua área é

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \text{sen} A.$$

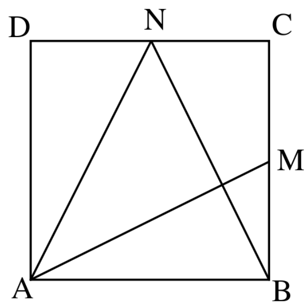
17) Com os dados da figura abaixo, calcule a razão entre as áreas A e B.



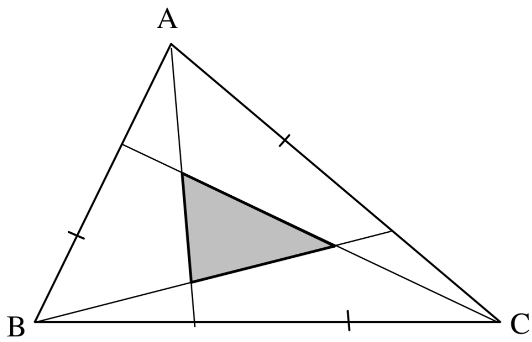
18) A letra “N” da figura abaixo foi construída a partir de um retângulo de base 10 e altura 12. Calcule sua área.



19) Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1 e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente. Traçando os segmentos AM, AN e NB, calcule as áreas das cinco partes em que o quadrado ficou dividido.

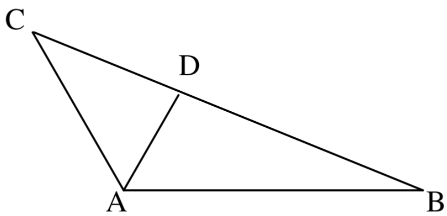


20) O triângulo ABC da figura a seguir tem área igual a 1. Cada um de seus lados foi dividido em três partes iguais. Calcule a área do triângulo sombreado.



21) No manuscrito de Aryabhatiya do século VI encontrou-se a seguinte afirmação: "Some 4 a 100, multiplique por 8 e some 62 000. O resultado é aproximadamente a circunferência do círculo de diâmetro 20 000." Qual é o valor de π que está implícito nesta afirmação?

22) Na figura a seguir, os ângulos BAD e DAC são iguais a 60°, $AB = 6$ e $AC = 4$. Quanto mede AD?



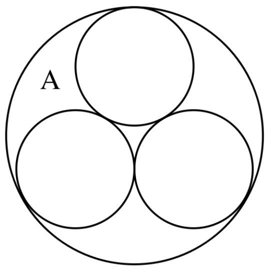
23) Em um círculo de raio 1 um arco tem comprimento x $(0 < x \leq \pi)$. Determine a área do segmento circular correspondente a esse arco.

24) Os pontos A, B e C, nesta ordem, sobre uma circunferência de raio 1 são tais que o arco AB mede 80° e o arco BC mede 50°.

Calcule a área da região do círculo limitada pelas cordas AC e BC e pelo arco AB.

25) Em uma circunferência de raio 1, as cordas AB e CD são paralelas e o centro da circunferência não está entre elas. A corda AB é igual ao lado do hexágono regular inscrito na circunferência e CD é igual ao lado do triângulo equilátero inscrito na mesma circunferência. Calcule a área da região do círculo compreendida entre as duas cordas.

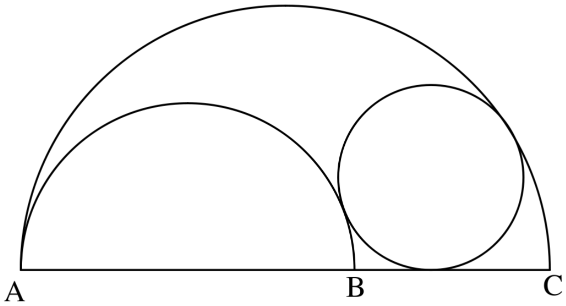
26) A figura a seguir mostra três circunferências de raios iguais a 1, tangentes entre si duas a duas, e uma circunferência maior tangente às três primeiras. Calcule a área da região A.



27) A figura abaixo mostra duas semicircunferências de diâmetros $AB = 4$ e $AC = 6$. Calcule o raio da circunferência que é

"principal"
2010/4/19
page 54
Estilo OBME

tangente às duas semicircunferências e ao segmento BC.



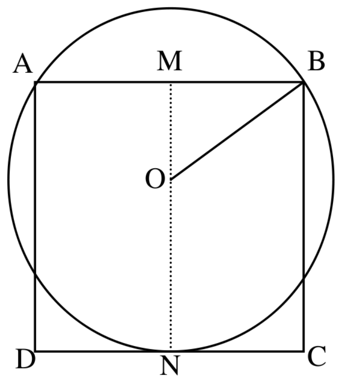
Capítulo 3

Soluções dos Problemas

3.1 Capítulo 1

1) Sejam: $x - r$, x e $x + r$ os lados de um triângulo retângulo. Considerando $r > 0$, $x + r$ é a hipotenusa e, portanto, $(x+r)^2 = x^2+(x-r)^2$. Desenvolvendo e simplificando, obtemos $x = 4r$. Portanto, os lados medem $3r$, $4r$ e $5r$.

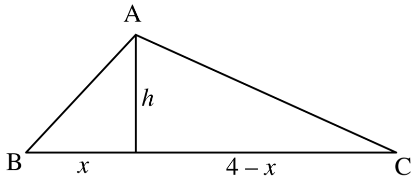
2)



Trace pelo centro O da circunferência o segmento MN perpendicular a AB, como na figura acima. Como M é médio de AB

temos, no triângulo retângulo OMB, $OB = R$, $MB = a/2$ e $OM = a - R$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMB, encontramos $R = \dfrac{5a}{8}$.

3) Considere a figura:



O Teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos retângulos fornece:

$$x_2 + h_2 = 12 \quad \text{e} \quad (4-x)^2 + h^2 = 20.$$

Logo $16 - 8x + x^2 + 12 - x^2 = 20$, o que dá $x = 1$. Portanto, altura do triângulo é igual a $\sqrt{11}$ e a área é $S = \dfrac{4\sqrt{11}}{2} = 2\sqrt{11}$.

4) Para a existência do triângulo devemos ter $1 < x < 7$. Se o triângulo é obtusângulo e x é o maior lado, devemos ter $x^2 > 3^2 + 4^2$, ou seja, $x > 5$. Se o lado que mede 4 é o maior, devemos ter $4^2 > x^2 + 3^2$, ou seja, $x < \sqrt{7}$. Portanto, esse triângulo é obtusângulo para $1 < x < \sqrt{7}$ ou $5 < x < \sqrt{7}$.

5) $a^2 = 4k^2(k+1)^2 + 4k(k+1) + 1 = b^2 + c^2$.

6) Usando as fórmulas que geram ternos pitagóricos, devemos ter $m^2 - n^2 = 17$, ou seja, $(m+n)(m-n) = 17$. Como 17 é primo, então, necessariamente, $m + n = 17$ e $m - n = 1$, o que dá $m = 9$ e $n = 8$. Portanto, o outro cateto é $2mn = 2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$ e a hipotenusa é $m^2 + n^2 = 81 + 64 = 145$. O perímetro é igual a 306.

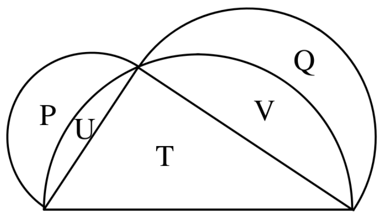
7) Se $a+b+c=p$, escrevemos $b+c=p-a$. Elevando ao quadrado, temos $b^2+c^2+2bc=a^2+p^2-2ap$. Usando o Teorema de Pitágoras e a relação $bc=ah$, ficamos com $2ah=p^2-2ap$, o que dá $a=\dfrac{p^2}{2(h+p)}$.

8) $\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{b^2+c^2}{(bc)^2}=\dfrac{a^2}{(ah)^2}=\dfrac{1}{h^2}$.

9) Se x é o comprimento do bambu temos: $(x+3)^2=x^2+8^2$, o que dá $x=\dfrac{55}{6}\cong 9,17$ chih.

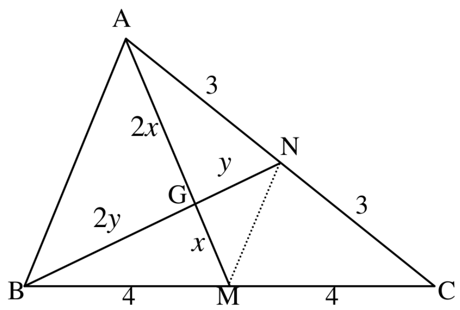
10) Sejam r_1, r_2 e r os raios dos círculos inscritos nos triângulos AHB, AHC e ABC. Esses três triângulos são semelhantes e, portanto, $\dfrac{r_1}{c}=\dfrac{r_2}{b}=\dfrac{r}{a}$. Elevando ao quadrado e multiplicando por π temos: $\dfrac{\pi r_1 r}{c^2}=\dfrac{\pi r_2 r}{b^2}=\dfrac{\pi r r}{a^2}$. Como $b^2+c^2=a^2$, concluímos que $\pi r_1^2+\pi r_2^2=\pi r^2$.

11) Sejam: T a área do triângulo, P e Q as áreas das lúnulas e U e V as áreas das outras duas regiões.



Como a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos temos $T+U+V=P+U+Q+V$, ou seja, $T=P+Q$, como queríamos demonstrar.

12) Sejam M e N os pontos médios dos lados BC e AC, respectivamente. As medianas AM e BN cortam-se no baricentro, que divide cada mediana na razão $2/1$. Observando a figura a seguir, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras nos triângulos AGN e BGM.



$$4x^2 + y^2 = 9 \qquad x + 4y = 16$$

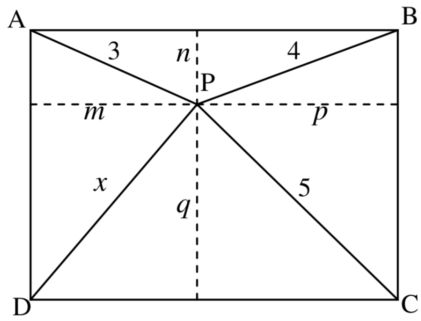
Somando e simplificando obtemos $x^2 + y^2 = 5$, ou seja, $MN = \sqrt{5}$ e, portanto, $AB = 2\sqrt{5}$.

13) Como os dois lados da desigualdade são positivos, observe as equivalências:

$$\begin{aligned} b + c < a + h \quad &\Leftrightarrow \quad (b+c)^2 < (a+h)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 + 2bc < a^2 + h^2 + 2ah \\ &\Leftrightarrow \quad 2bc < h^2 + 2ah \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < h^2. \end{aligned}$$

Como $h > 0$, a desigualdade é verdadeira.

14) Traçando por P paralelas aos lados do retângulo, temos a situação da figura abaixo.



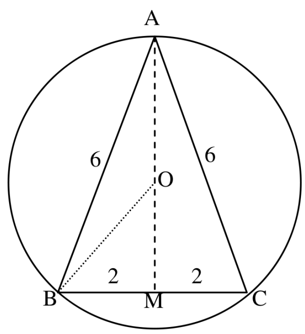
Usaremos o Teorema de Pitágoras quatro vezes.

$$m^2 + n^2 = 9 \qquad p + q = 25$$

Somando,

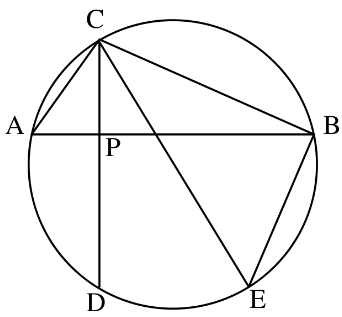
$$m^2 + q^2 + n^2 + p^2 = 34 \qquad x^2 + 16 = 34 \qquad x = 3\sqrt{2}.$$

15) Traçamos a altura AM que passa pelo centro O da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. No triângulo retângulo AMB calculamos $AM = 4\sqrt{2}$. Sendo R o raio da circunferência, o triângulo OMB fornece: $R^2 = 2^2 + (4\sqrt{2} - R)^2$



o que dá $R = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

16)

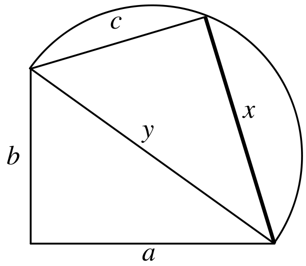


Traçando o diâmetro CE, temos que o triângulo CBE é retângulo em B e que os ângulos CAB e CEB são iguais, pois subtendem o mesmo arco BC. Portanto, os triângulos CPA e CBE são semelhantes e

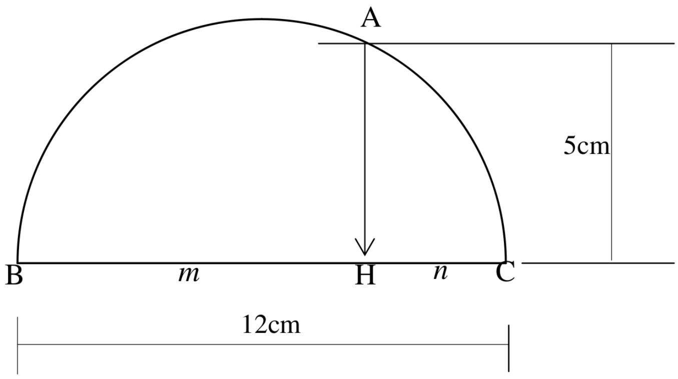
$$\frac{CA}{CE} = \frac{CP}{BC} \qquad \text{ou seja,} \qquad 2R = \frac{CA\cdot}{CP}.$$

Logo, $R = \dfrac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{2c}$.

17) Suponha, naturalmente, que $c < \sqrt{a^2+b^2}$ para que o problema tenha solução. Construímos, inicialmente, o triângulo retângulo de catetos a e b. Sua hipotenusa mede $y = \sqrt{a^2+b^2}$. Em seguida, construímos o triângulo retângulo de hipotenusa y e um cateto igual a c. O outro cateto é x.



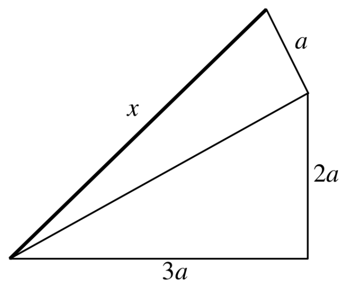
18) Sejam m e n, base e altura do retângulo. Pelo enunciado temos



$m+n = 12$ e $mn = 25$. Portanto, o problema consiste em determinar graficamente dois números, conhecendo sua soma e seu produto. Observe que resolver este sistema equivale a construir um triângulo retângulo conhecendo sua hipotenusa e sua altura. Como a hipotenusa é $a = m + n = 12$ e a altura é $h = \sqrt{mn} = \sqrt{25} = 5$, desenhamos uma semicircunferência de diâmetro $BC = a = 12$ cm e uma paralela distando 5 cm desse diâmetro. A interseção dessa paralela com a circunferência nos dá o vértice A do ângulo reto do triângulo. O ponto H, projeção de

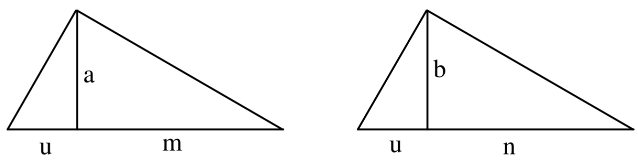
A sobre BC, fornece os segmentos $BH = m$ e $HC = n$ que são as medidas do retângulo que procuramos.

19) A figura a seguir mostra dois triângulos retângulos justapostos. O Teorema de Pitágoras, usado duas vezes, fornece $x = a\sqrt{14}$.



20) Veja que $x = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2}$. Portanto, x é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$.

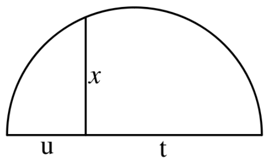
21)



Nestas figuras, u é um segmento qualquer. Construindo a primeira figura, encontramos $m = \dfrac{a^2}{u}$ e construindo a segunda, $n = \dfrac{b^2}{u}$. Construindo agora um triângulo retângulo cujos catetos são m e n, temos sua hipotenusa que é

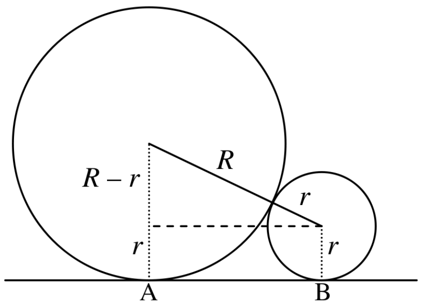
$$t = \sqrt{\frac{a^4}{u^2} + \frac{b^4}{u^2}} = \frac{1}{u}\sqrt{a^4 + b^4}.$$

Construímos, finalmente, a figura seguinte:

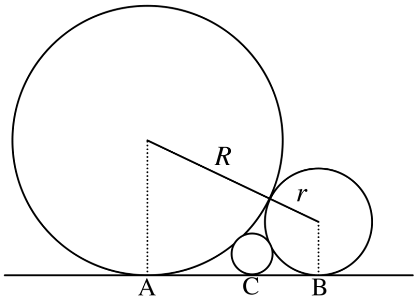


Desta forma, $x = \sqrt{ut} = \sqrt{u\frac{1}{u}\sqrt{a^4+b^4}} = \sqrt[4]{a^4+b^4}$. Repare que esta construção é independente da unidade.

22) Observe a figura a seguir.



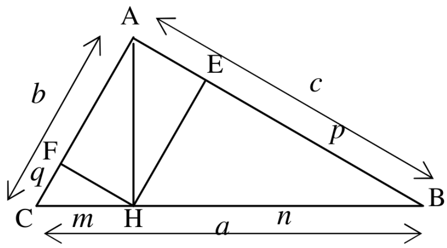
O Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo construído na figura fornece: $AB^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$, o que dá $AB = 2\sqrt{Rr}$. Para prosseguir, seja C o ponto de tangência da terceira circunferência com a reta.



Se x é o raio da terceira circunferência, como $AC + CB = AB$, temos:

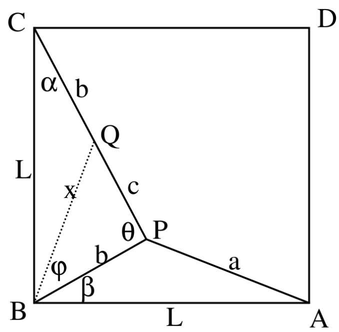
$$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = \sqrt{2Rr} \qquad \text{o que dá} \quad x = \frac{Rr}{R + r + 2\sqrt{Rr}}.$$

23)



Os triângulos BEH e BAC são semelhantes: $\dfrac{n}{a} = \dfrac{p}{c}$. Como $n = \dfrac{c^2}{a}$, temos $c^3 = a^2p$, ou ainda, $c^6 = a^4p^2$. Os triângulos CHF e CBA são semelhantes: $\dfrac{m}{a} = \dfrac{q}{b}$. Como $m = \dfrac{b^2}{a}$, temos $b^3 = a^2q$, ou ainda, $b^6 = a^4q^2$. Como $b^2 + c^2 = a^2$, temos $\sqrt[3]{a^4p^2} + \sqrt[3]{a^4q^2} = \sqrt[3]{a^6}$, ou seja, $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

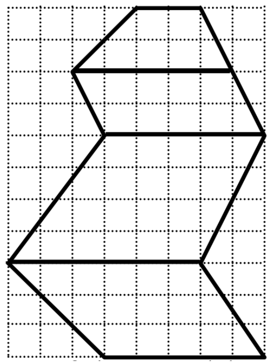
24) Na figura a seguir, sejam: $\angle BPC = \theta$, $\angle BCP = \alpha$, $\angle PBA = \beta$ e $\angle PBC = \phi$. Assinale o ponto Q no segmento PC tal que $CQ = b$. Consequentemente, $QP = c$.



Suponha $\theta > 90^o$. Então, $x^2 > b^2 + c^2$, ou seja, $x > a$. Observando-se os triângulos QCB e PBA, que têm dois lados em comum, conclui-se que $\alpha > \beta$. No triângulo BPC, como $\theta > 90^o$, conclui-se que $\alpha + \phi < 90^o$. Mas como $\beta + \phi = 90^o$, pois $ABCD$ é um quadrado, então $\alpha < \beta$, uma contradição. Da mesma forma, supor $\theta > 90^o$ conduz a uma outra contradição equivalente. Logo, $\theta < 90^o$.

3.2 Capítulo 2

1) A figura permite a divisão por segmentos horizontais em partes fáceis de calcular.



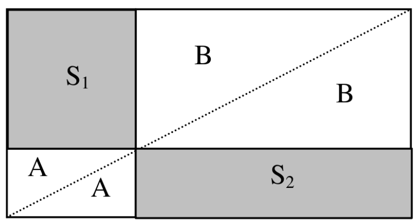
As partes 1, 3 e 4 são trapézios e a parte 2 é um paralelogramo. Temos então:

$$A_1 = \frac{5+2}{2} \cdot 2 = 7 \qquad A_2 = 5 \cdot 2 = 10$$

$$A_3 = \frac{6+5}{2} \cdot 4 = 22 \qquad A_4 = \frac{6+5}{2} \cdot 3 = 16{,}5$$

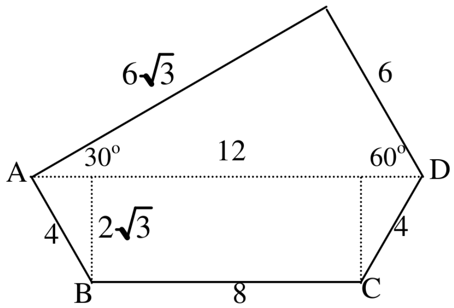
A área da figura é 55,5.

2) A diagonal de um retângulo divide esse retângulo em dois triângulos congruentes, portanto de mesma área.



Observando a figura acima e sendo S_1 e S_2 as áreas dos dois retângulos sombreados, devemos ter $S_1+A+B = S_2+A+B$ e, portanto, $S_1 = S_2$.

3) A figura é assim:



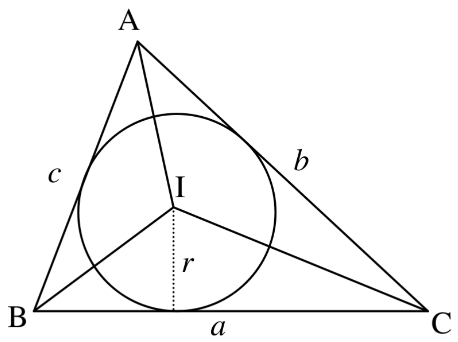
Se $AB = CD$ e se os ângulos B e C são iguais, então AD é paralela a BC. Portanto, $ABCD$ é um trapézio e ADE é um triângulo retângulo com ângulos de 30º e 60º. As medidas são fáceis de calcular e a área do pentágono é:

$$S = \frac{12+8}{2} \cdot 2\sqrt{3} + \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 38\sqrt{3} \cong 65{,}74.$$

4) O semiperímetro é $p = \dfrac{5+7+8}{2} = 10$. A fórmula de Heron fornece:

$$S = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

Observe agora a figura abaixo, onde I é o centro da circunferência inscrita e r o seu raio.



A área do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos BIC, CIA e AIB. Logo,

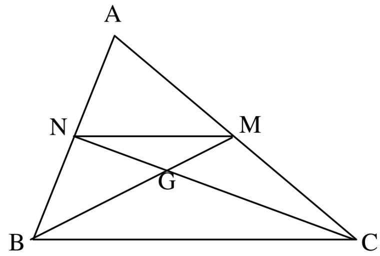
$$10\sqrt{3} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}r = 10r$$

e então, $r = \sqrt{3}$cm.

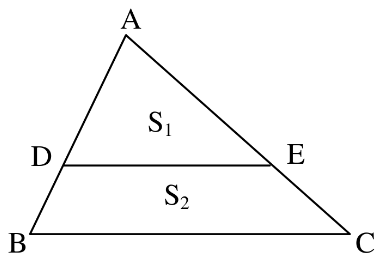
5) Os triângulos ABC e ADC são congruentes. Logo, ambos possuem área igual a $1/2$. Os segmentos DP, DQ e DR dividem o triângulo ADC em quatro triângulos de mesma área. O triângulo DPQ tem área $1/8$.

6) O ponto G, interseção das medianas, é o baricentro e, como se sabe, $GM/BM = 1/3$. Como MB é mediana no triângulo ABC, então a área do triângulo ABC é $(ABM) = 1/2$. Como MN é mediana no triângulo ABM, então $(BMN) = 1/4$. Como $GM/BM = 1/3$, então $(GMN)/(BMN) = 1/3$. Assim,

$$(GMN) = (1/3)(1/4) = 1/12.$$

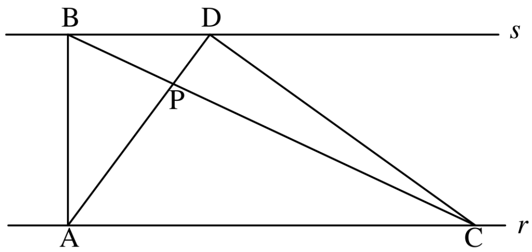


7)



A razão de semelhança entre os triângulos ADE e ABC é $AD/AB = 2/3$. Então, a razão entre suas áreas é $(2/3)^2$. Se S é a área do triângulo ABC, então $S_1/S = 4/9$. Logo, S_1 é menor que a metade de S e, portanto, S_2 é maior que a metade de S. Daí, $S_2 > S_1$.

8)

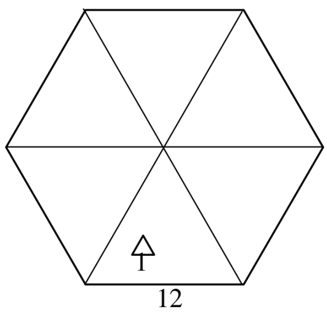


(a) Os triângulos BAC e DAC têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura. Como ambos têm em comum a parte PAB, então os triângulos PAB e PCD têm mesma área.

(b) A área do triângulo ABD é igual a $\dfrac{10 \cdot 7}{2} = 35$. Observando a semelhança dos triângulos PBD e PAC, temos que $PD/AP = 7/18$. Logo,
$AD = AP + PD = AP + (7/18)AP = (25/18)AP$ e
$PD/AD = 7/25$. Então,

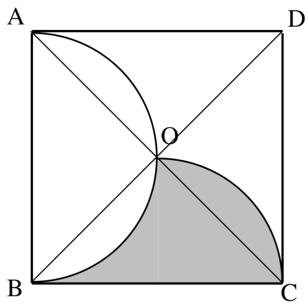
$$\frac{(PBD)}{(ABD)} = \frac{PD}{AD} = \frac{7}{25} \quad \text{e} \quad (PDB) = \frac{49}{5} = 9{,}8.$$

9)

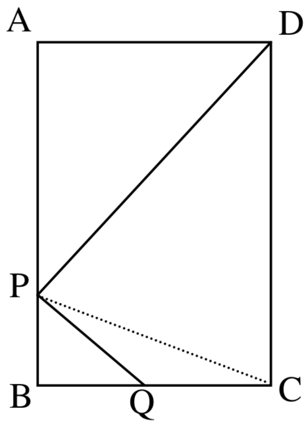


O hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros, como mostra a figura acima. A razão de semelhança entre um desses triângulos e o triângulo equilátero de lado unitário é 12. Logo, a razão entre suas áreas é 122 = 144. Cabem, portanto, 144 triângulos de lado unitário dentro de cada triângulo de lado 12. Assim, dentro do hexágono, caberão $144 \times 6 = 864$ triângulos de lado unitário.

10) As circunferências de diâmetros AB e BC cortam-se no centro do quadrado, ponto de interseção das diagonais. Observe a figura a seguir e conclua que a área sombreada é igual à área do triângulo OBC, ou seja, 1/4 da área do quadrado.

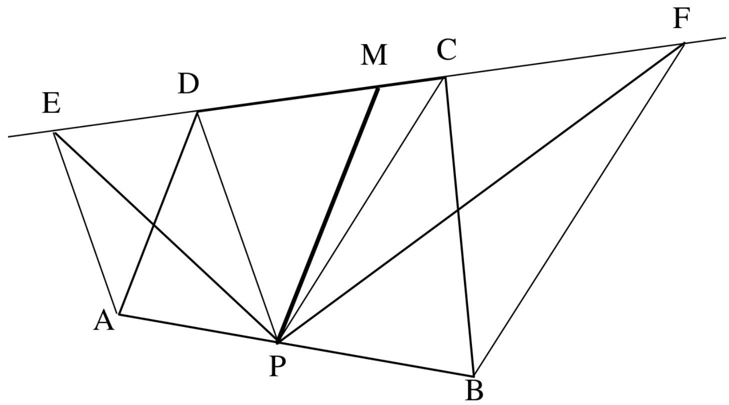


11)



A parte coberta é o quadrilátero $DPQC$. Mas o triângulo DPC tem área igual à metade da área do retângulo. Logo, a parte coberta tem área maior que metade da área do retângulo.

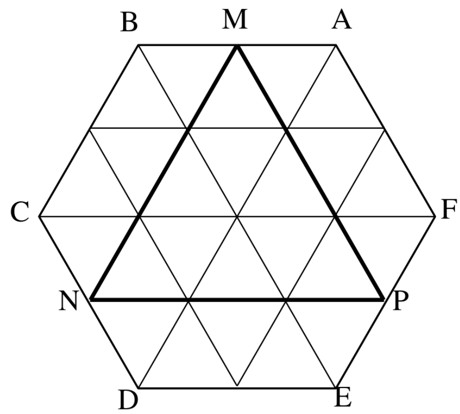
12) Seja $ABCD$ o nosso quadrilátero com o ponto P sobre o lado AB. Traçamos a reta CD.



Observe a figura acima. Traçamos AE paralela a PD e BF paralela a PC. Assim, os triângulos PAD e PED possuem mesma área e também os triângulos PBC e PFC possuem mesma área. Logo, a área do quadrilátero $ABCD$ é igual à área do triângulo PEF. Dividir a área de $ABCD$ em duas partes iguais por uma reta passando por P é então o mesmo que dividir a área de PEF em duas partes iguais por uma reta passando por P. Mas isto é fácil. Basta traçar a mediana do triângulo PEF. Assinale então o ponto M, médio de EF, e a reta PM divide tanto o triângulo PEF quanto o quadrilátero $ABCD$ em duas partes de mesma área. O problema está resolvido.

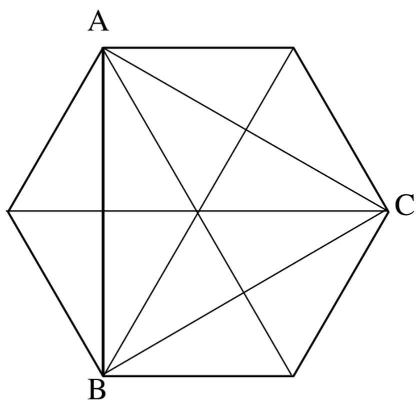
NOTA: Na construção acima, o ponto M, médio de EF ficou no interior do lado CD do quadrilátero e a solução está perfeita. E se isto não acontecesse? Fica o desafio para o leitor encontrar a solução neste caso.

13) Observe a figura a seguir.

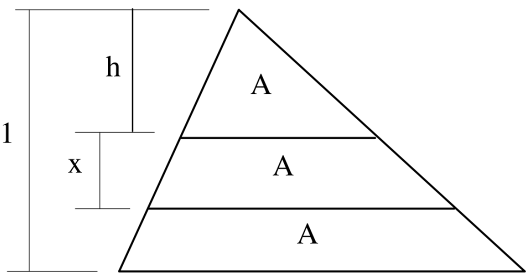


O hexágono está dividido em 24 triângulos equiláteros iguais e o triângulo MNP contém 9 deles. A razão entre a área do triângulo e do hexágono é 9/24, ou seja, 3/8.

14) Observe a figura a seguir. O triângulo ABC tem área igual à metade da área do hexágono.



15)



Seja h a altura do triângulo menor. A figura mostra três triângulos semelhantes: um de área A e altura h, outro de área 2A e altura $h+x$ e o terceiro de área $3A$ e altura 1. Como a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança temos, entre o primeiro e o terceiro,

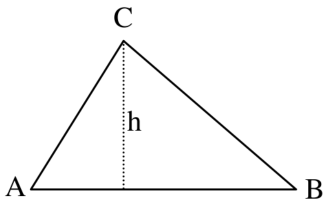
$$\frac{A}{3A} = \left(\frac{h}{1}\right)^2 \qquad \text{ou seja} \qquad h = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

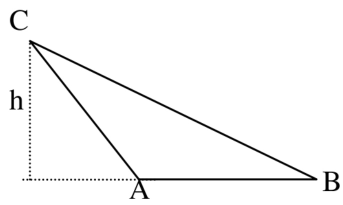
Agora, entre o segundo e o terceiro, temos:

$$\frac{A}{3A} = \left(\frac{h+x}{1}\right)^2 \qquad \text{ou seja} \qquad h+x = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

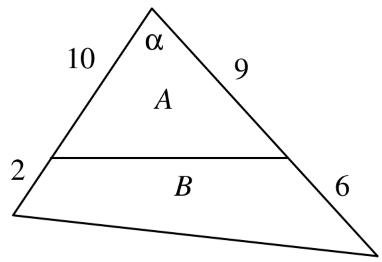
Portanto, $x = \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$.

16) Se A é agudo (1ª figura) então a altura relativa a AB é $h = AC \cdot \text{sen}A$. Então, a área do triângulo ABC é $S = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \text{sen}A$. Se A é obtuso (2ª figura), então a altura relativa a AB é $h = AC \cdot \text{sen}(\pi - A) = AC \cdot \text{sen}A$ e a fórmula é verdadeira. Se A é reto, $\text{sen}A = 1$ e a fórmula vale.





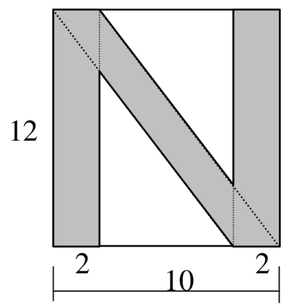
17) Na figura dada nesse exercício, seja α o ângulo do vértice superior do triângulo. Sendo $T = A + B$ a área do triângulo maior temos:



$$\frac{A}{T} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot \text{sen}\alpha}{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Se a área A é a metade da área do triângulo, então a área B também é. Logo, a razão entre as áreas A e B é igual a 1.

18)

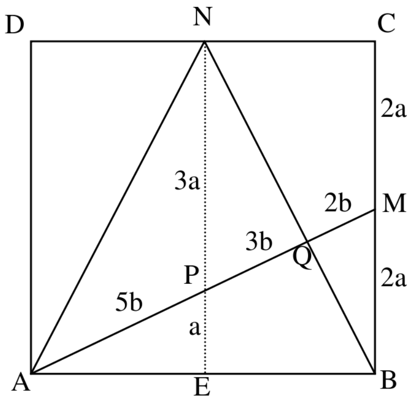


A ideia mais simples parece que é calcular a área do retângulo e subtrair a área dos dois triângulos retângulos vazios. O retângulo tem área $10 \times 12 = 120$ e cada triângulo retângulo tem um cateto igual a 6 e outro igual a x. Uma simples semelhança nos dá

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{8}$$

ou seja, $x = 9$. Então, a área dos dois triângulos juntos é $6 \times 9 = 54$ e a área sombreada é igual a $120 - 54 = 66$.

19)



Veja a figura anterior. O ponto Q é a interseção de AM com BN e traçamos por N a perpendicular NE a AB, que cortou AM em P. Fazendo $BM = MC = 2a$ temos $PE = a$ e $NP = 3a$. Como os triângulos QPN e QMB são semelhantes, se fizermos $QM = 2b$, teremos $PQ = 3b$ e $AP = 5b$. Vamos representar por $(XYZ...)$ a área do polígono $XYZ...$ Como o quadrado $ABCD$ tem lado 1, a área do triângulo ABM é igual a $1/4$. Vamos agora calcular a razão entre as áreas dos triângulos ABQ e ABM.

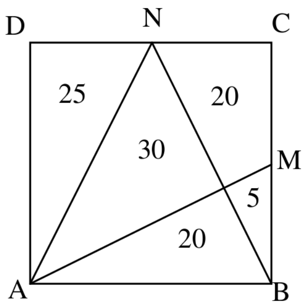
$$\frac{(ABQ)}{(ABM)} = \frac{8b}{10b} = \frac{4}{5}.$$

Logo, $(ABQ) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ e assim calculamos a área de uma das partes. A área de BQM é a diferença: $(BQM) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Os triângulos ABM e BCN são congruentes e, portanto, têm mesma área. Logo a área do quadrilátero $MCNQ$ é a mesma área do triângulo ABQ. Logo, $(MCNQ) = \frac{1}{5}$.

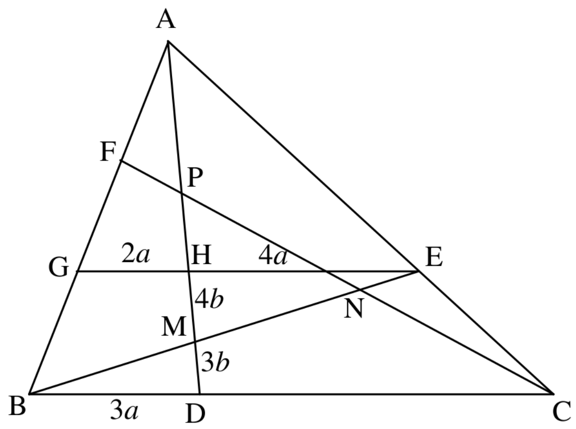
Como a área do triângulo ADN é $\frac{1}{4}$, então a área do triângulo AQN é

$$(AQN) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{10}.$$

O problema está resolvido. Considerando a área do quadrado igual a 100, as áreas das partes podem ser vistas na figura a seguir.



20) Observe a figura do problema



Como a área do triângulo ABC é igual a 1, a área de ABD é $1/3$. Vamos, inicialmente, calcular a razão AM/AD, o que vai nos permitir encontrar a área do triângulo ABM.

Traçamos GE, paralela a BC, que corta AD em H. Fazendo $BD = 3a$, como $AG/AB = 2/3$, temos $GH = 2a$. Como DC é o dobro de BD, então HE é o dobro de GH, ou seja, $HE = 4a$. Mas, os triângulos MHE e MDB são semelhantes e, portanto,

a razão HE/BD é igual a razão HM/MD. Façamos então $HM = 4b$ e $MD = 3b$. Ainda, como AG é o dobro de GB, então AH é o dobro de HD e, consequentemente, $AH = 14b$. Temos então a razão que procurávamos:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{18b}{21b} = \frac{6}{7}.$$

A razão entre as áreas dos triângulos ABM e ABD é igual a razão entre AM e AD. Logo,

$$\frac{(ABM)}{ABD} = \frac{AM}{AD} = \frac{6}{7}$$

e como $(ABD) = \frac{1}{3}$, temos $(ABM) = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$.
Este foi o passo importante do problema e, de forma inteiramente análoga, concluímos que os triângulos BCN e CPA têm também área igual a $\frac{2}{7}$. A área do triângulo central é igual à área de ABC subtraída das áreas dos triângulos ABM, BCN e CAP. Portanto,

$$(MNP) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}.$$

Um belo e inesperado resultado.

21) $104 \times 8 + 62\,000 = 62\,832 = 2\pi 10\,000$. Isto dá $\pi = 3{,}1416$.

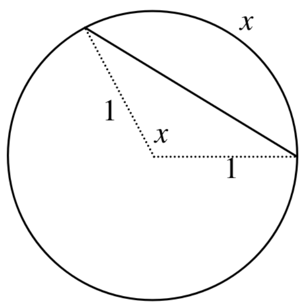
22) A área de ABC é a soma das áreas de ABD e ADC. Seja $x = AD$. Assim:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \text{sen}(120^o) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \text{sen}(60^o) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \text{sen}(60^o).$$

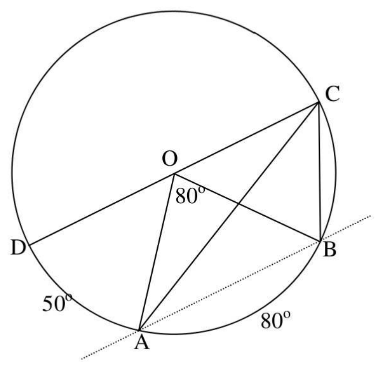
Como $\operatorname{sen}(120^o) = \operatorname{sen}(60^o)$ ficamos com $24 = 10x$, ou seja, $x = 2{,}4$.

23) A área do segmento circular correspondente ao arco de comprimento x é igual à área do setor circular, cujo ângulo central é x (em radianos) menos a área do triângulo que tem dois lados iguais ao raio com ângulo x entre eles. Então, a área do segmento circular é:

$$S = \frac{x \cdot 1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} x = \frac{x - \operatorname{sen} x}{2}.$$



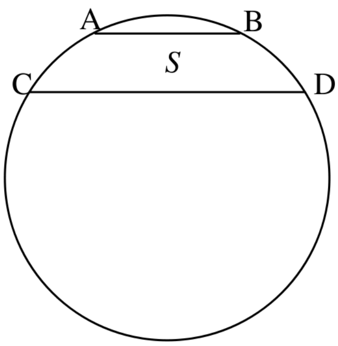
24) Observe a figura a seguir, onde traçamos o diâmetro CD.



Como o arco AB mede 80º e o arco BC mede 50º, concluímos que o arco DA mede 50º. Os arcos BC e DA são iguais e esta feliz coincidência nos permite concluir que a reta AB é paralela ao diâmetro CD. Assim, podemos mover C até O, centro da circunferência, e a área da região que devemos calcular não se altera. A área que procuramos é então igual à área de um setor cujo ângulo central mede 80º. Isto é fácil,

$$s = \frac{80}{360}\pi 1^2 = \frac{2\pi}{9}.$$

25) A área que devemos calcular está na figura a seguir.



A área do círculo é π. Sejam H a área do hexágono regular e T a área do triângulo equilátero inscritos nessa circunferência. Vamos utilizar aqui o resultado do Problema 14: a área do hexágono regular é o dobro da área do triângulo equilátero, ambos inscritos na mesma circunferência. Isto quer dizer que $H = 2T$.

A área que vamos calcular é a diferença entre as áreas dos segmen-

tos circulares cujas cordas são CD e AB. Temos então:

$$S = \frac{\pi - T}{3} - \frac{\pi - H}{6} = \frac{2\pi - 2T - \pi + H}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

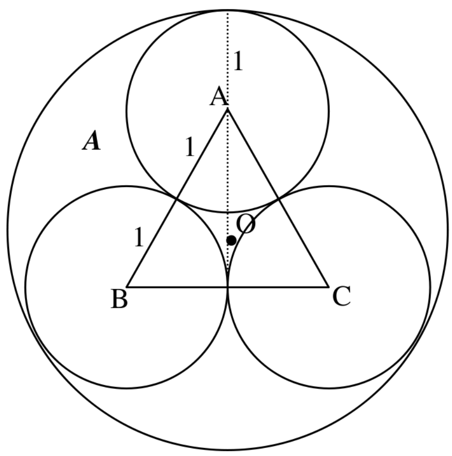
26) Sejam A, B e C os centros das três circunferências pequenas e seja O, o centro da circunferência grande. O ponto O é o centro do triângulo equilátero ABC (de lado igual a 2) e, como sabemos, sua distância a cada um dos vértices é igual a 2/3 de sua altura.

Temos então:

$$OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, o raio da circunferência grande é

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}.$$



A área S da região central é igual à área do triângulo ABC subtraída de três setores de 60°. Mas, esses três setores formam um

semicírculo. Então,

$$S = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi 1^2}{2} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}.$$

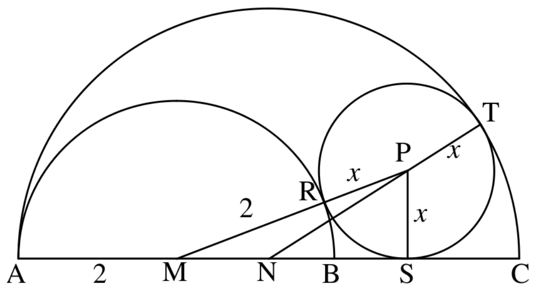
O triplo da área A assinalada na figura é igual à área do círculo grande subtraída dos três círculos pequenos e da região central. Portanto,

$$A = \frac{\left(\pi R^2 - 3\pi - \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{3}.$$

Substituindo o valor de R, isto dá, após alguns cálculos,

$$A = \frac{1}{18}\left(\left(8\sqrt{3} - 1\right)\pi - 6\sqrt{3}\right).$$

27)



Sejam M e N os centros das semicircunferências, seja P o centro da circunferência e seja $PR = PS = PT = x$ o seu raio. É fácil ver que $MA = MR = 2$, $MN = 1$ e $NT = 3 - x$. O semiperímetro do triângulo MNP é

$$p = \frac{2 + x + 3 - x + 1}{2} = 3.$$

Podemos então calcular a área do triângulo MNP de duas formas: pela fórmula de Heron e pela metade do produto da base MN pela altura PS. Assim,

$$\sqrt{3(3-2-x)(3-3+x)(3-1)} = \frac{1 \cdot x}{2}.$$

Daí, $3(1-x)x \cdot 2 = \dfrac{x^2}{4}$ e, consequentemente, $x = \dfrac{24}{25} = 0{,}96$.

Para saber mais

WAGNER, E. – *Construções Geométricas* – SBM.
Aborda as construções elementares, método dos lugares geométricos, método algébrico, áreas, construções aproximadas, transformações geométricas e traz um apêndice onde se mostra quais são as construções possíveis com régua e compasso.

LIMA, Elon – *Meu professor de Matemática* – SBM.
Coleção de artigos interessantíssimos sobre assuntos diversos da matemática elementar incluindo o Teorema de Pitágoras e aplicações.

WAGNER, E. – *Usando áreas* – RPM 21.
Mostra diversas demonstrações de propriedades geométricas usando áreas, incluindo o teorema da bissetriz e fórmulas trigonométricas.

Na internet

http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem
Contém diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras incluindo a mais antiga, que aparece no livro de Euclides (Os Elementos, séc 3 a.C.)

http://www.frontiernet.net/ imaging/pythagorean.html
Contém a demonstração de Perigal (1873) que é a forma mais econômica de dividir o quadrado construído sobre a hipotenusa em partes que

preenchem os dois quadrados menores. Pode ser manipulado.

http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythathr/pythathr.html
Possui diversas aplicações interessantes e interativas, permitindo a manipulação do usuário em problemas como: a menor distância entre pontos da superfície de um paralelepípedo, o problema de Hipócrates, o teorema da mediana de um triângulo qualquer, fractais com Pitágoras e muito mais.

http://www.jimloy.com/geometry/construc.htm
Mostra as construções elementares com régua e compasso. Ótimo para o iniciante.

http://www.nvcc.edu/home/tstreilein/constructions/Circle/circle4.htm
Mostra diversas construções elementares (e outras nem tanto) com a possibilidade de usar um programa de geometria dinâmica. Muito educativo e interessante.